LA

RÉSERVE MATHÉMATIQUE

DANS L'ASSURANCE SUR LA VIE

THÈSE

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE NEUCHATEL
POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

ALEXANDRE IVANOFF

de Eski-Djoumaia (Bulgarie)

DIPLÔMÉ DE L'UNIVERSITÉ DE SOFIA

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

NEUCHATEL

IMPRIMERIE ATTINGER FRÈRES

1915

Diss Neuchâtel 1915

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555007_0057

LA RÉSERVE MATHÉMATIQUE

DANS L'ASSURANCE SUR LA VIE

La Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel, sur le rapport de MM. les Professeurs L.-G. DuPasquier et L. Gaberel, autorise l'impression de la présente thèse sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont contenues.

Neuchâtel, août 1915.

Le Doyen,
A. JAQUEROD.

61298

LA
RÉSERVE MATHÉMATIQUE
DANS L'ASSURANCE SUR LA VIE

THÈSE

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE NEUCHATEL
POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

PAR

ALEXANDRE IVANOFF

de Eski-Djoumaia (Bulgarie)

DIPLÔMÉ DE L'UNIVERSITÉ DE SOFIA

NEUCHATEL
IMPRIMERIE ATTINGER FRÈRES
1915

A MON CHER MAITRE

MONSIEUR LE DOCTEUR L. GUSTAVE DU PASQUIER

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE NEUCHATEL

Hommage reconnaissant.

BIBLIOGRAPHIE

UTILISÉE DANS CE TRAVAIL

HAMON : *Histoire générale de l'assurance.* Giard & Brière, Paris, 1896.

H. POTERIN DU MOTEL : *Assurance sur la vie.* Warnier & Dulac, Paris, 1899.

P.-J. RICHARD et Émile PETIT : *Théorie mathématique des assurances.* Octave Doin & Fils, Paris, 1908.

S.-E. SAVICH : Элементарная Теорія Страхованія. (*Traité élémentaire des assurances sur la vie*, Pétrograd, 1909.)

U. BROGGI : *Traité des assurances sur la vie.* A. Hermann, Paris, 1907.

Émile DORMOY : *Théorie mathématique des assurances sur la vie.* Gauthier-Villars, Paris, 1878.

René POUSSIN : *Traité élémentaire des assurances sur la vie.* L. Dulac, Paris, 1906.

Moniteur des assurances, fondé par Eugène Reboul, Paris. (Volumes 1 à 50.)

Rapports du Bureau fédéral des assurances sur les entreprises privées en matière d'assurances en Suisse, publiés conformément à la décision du Conseil fédéral suisse ; volumes 1 à 27, Berne.

Mariages, naissances et décès en Suisse de 1891 à 1900 ; publié par le bureau de statistique du Département fédéral de l'Intérieur. Notamment la *IIIième partie,* contenant la « Table de mortalité 1889-1900 », Berne. En commission chez A. Francke

Годишени отчети на чиновническото кооперативно спестовно-застрахователно Дружество. (Comptes-rendus de la Société coopérative d'assurance et d'épargne des fonctionnaires bulgares, de 1905 à 1914.) Sofia.

Les notations, dans ce travail, sont en général conformes aux notations internationales ; voici celles utilisées ici :

1. Symboles principaux :

x, y, z. âges des têtes sur lesquelles repose l'assurance.

ω ..... âge limite de la table de mortalité (indiqué par la dernière lettre de l'alphabet grec).

l ..... nombre des vivants (initiale de « living » = vivant).

d ..... nombre des décès pendant une année (initiale de «death» = décès). Ce d est toujours accompagné d'au moins un indice.

a ..... valeur actuelle d'une annuité payable à l'avance, c'est-à-dire au commencement de chaque année, et dont le montant est égal à *1* (initiale de annuité).

a ..... valeur actuelle de la même annuité payable à terme échu, c'est-à-dire à la fin de chaque année.

A ..... valeur actuelle d'une somme dont le montant est *1*, et qui est payable lors d'un décès survenant dans certaines conditions (initiale de « Amount » = montant).

P ..... prime ; indique toujours le montant d'une certaine prime, donc d'une somme payée par l'assuré (initiale de Premium = prime).

E ..... valeur actuelle d'une somme de montant *1* payable si certaines conditions de vie se réalisent. Ce symbole indique une assurance dotale (initiale de « Endowment » = dotation).

V ..... indique une réserve mathématique.

i ..... intérêt annuel rapporté par le capital *1*; par exemple au taux de 5 % l'an, $i = 0{,}05 = \frac{1}{20}$

v ..... facteur d'escompte; définition : $v = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1}$; par exemple au taux de 5 % l'an, $v = \frac{1}{1{,}05} = \frac{20}{21}$

d ..... taux annuel d'escompte $d = \frac{i}{1+i}$; on démontre que $d = 1 - v = i \,.\, v$; ce d n'est jamais accompagné d'indice.

2. Règles.

1. Quand une lettre est placée à droite et au bas d'un symbole principal, elle indique un âge.

Exemples : l_x = nombre de vivants d'âge x.

d_x = nombre des personnes décédées dans la $(x+1)^{\text{ième}}$ année, donc : ayant atteint l'âge x, mais pas l'âge $x+1$.

a_x = valeur actuelle d'une annuité payable à l'avance, dont le montant est *1*, et reposant sur une tête d'âge x.

2. Une lettre ou un chiffre placé en bas et à gauche d'un symbole principal indiquent le nombre d'années qu'il faut prendre en considération, donc une durée.

Exemples : ${}_n a_x$ = valeur actuelle d'une annuité de montant *1*, payable à l'avance, reposant sur une tête d'âge x et temporaire pendant n années.

${}_{12}E_9$ = valeur actuelle d'une assurance dotale de montant *1*, reposant sur une tête de 9 ans et payable si l'assuré vit dans 12 ans.

3. *Règle de la barre verticale.* Lorsqu'une lettre (ou un chiffre) est suivi d'une barre verticale, cette lettre (ou ce chiffre) indique le temps pendant lequel la chose exprimée par le symbole principal doit être différée, suspendue.

Exemple : ${}_n|a_x$ = valeur actuelle d'une annuité de montant *1*, payable à l'avance, reposant sur une tête d'âge x et différée de n années.

4. Lorsque la barre verticale se trouve *devant* une lettre (ou un chiffre), cette lettre (ou ce chiffre) indique la *durée* du contrat exprimé par le symbole principal.

Exemple : $|_nP_x$ indique qu'une certaine prime doit être payée pendant n années et repose sur une tête d'âge x actuellement.

5. Le signe $\overline{\quad}|$ se rapporte toujours à une durée ; $\overline{n}|$ signifie que les paiements indiqués par le symbole principal, s'ils s'effectuent, se font au plus pendant n années.

Exemple : $a_{x;\overline{n}|}$ = valeur actuelle d'une rente viagère de montant *1*, reposant sur une tête d'âge x et temporaire pendant n années.

3. Symboles de commutation.

Ils sont au nombre de six pour les assurances sur une tête. Une fois calculés, avec une table de mortalité et un taux d'intérêts donnés, ils permettent de résoudre numériquement, avec un minimum de travail, tout problème d'assurance sur une tête. L'idée en est due au mathématicien danois *J.-N. Tetens* (1736-1807) et à l'Anglais *George Barret*, leur forme actuelle à *Griffith Davies* (1825).

Voici la définition de ces symboles de commutation :

1° $D_x = l \cdot v^x$ = nombre escompté des vivants. Comme la table de mortalité s'arrête à l'âge extrême ω, et qu'en conséquence,

$l_{\omega+1} = l_{\omega+2} = \ldots\ldots = l_{\omega+k} = 0$ pour toute valeur positive de k, on a $D_{\omega+1} = D_{\omega+2} = \ldots\ldots = D_{\omega+k} = 0$ pour toute valeur positive de k.

2° $N_x = \Sigma D_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots\ldots + D_\omega$. Comme $D_{\omega+k} = 0$, on peut écrire aussi :

$$N_x = \sum_{\lambda}^{0\ldots\infty} D_{x+\lambda} \qquad \text{Il s'ensuit : } N_{\omega+k} = 0$$

3° $S_x = N_x + N_{x+1} + \ldots\ldots + N_\omega$; on peut écrire aussi :

$$S_x = \sum_{\lambda}^{0\ldots\infty} N_{x+\lambda} \qquad \text{Il s'ensuit : } S_{\omega+k} = 0$$

4° $C_x = d_x \,.\, v^{x+1}$ = nombre escompté des morts. Pour la même raison que ci-dessus, on a $C_{\omega+k} = 0$ pour toute valeur positive de k.

5° $M_x = \Sigma C_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots\ldots + C_\omega$; on peut écrire aussi :

$$M_x = \sum_{\lambda}^{0\ldots\infty} C_{x+\lambda} \qquad \text{Il s'ensuit : } M_{\omega+k} = 0$$

6° $R_x = \Sigma M_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \ldots\ldots + M_\omega$; on peut écrire aussi :

$$R_x = \sum_{\lambda}^{0\ldots\infty} M_{x+\lambda}$$

Il s'ensuit : $R_{\omega+k} = 0$ pour toute valeur positive de k.

Emploi du symbole principal P

P_x est une abréviation pour $P(A_x)$ et représente : le montant de la prime annuelle constante qu'une personne actuellement d'âge x doit payer, sa vie durant, pour assurer à ses ayants-droit, lors de sa mort, la somme de *1*.

${}_{t}P_{x}$ est une abréviation pour ${}_{t}P(A_{x})$ et représente : le montant de la prime annuelle constante qu'une personne actuellement d'âge x doit payer pendant t années au plus, pour assurer à ses ayants-droit, lors de sa mort, la somme de t.

$P_{x;\overline{n}|}$ est une abréviation pour ${}_{n}P(A_{x;\overline{n}|})$ et représente : le montant de la prime annuelle constante qu'une personne actuellement d'âge x doit payer, si elle vit et pendant n années au plus, pour assurer le capital *1* dans les conditions suivantes :

ou bien :

1° Si elle meurt avant n années, le payement à ses ayants-droit la somme de *1*.

ou bien :

2° Si elle atteint l'âge $x + n$, le payement à elle-même de la somme de *1*.

Autres exemples.

${}_{n|t}a_{x}$ ..... indique la valeur actuelle d'une rente viagère dont le montant est égal à *1*, payable au commencement de chaque année et reposant sur une tête d'âge x, rente différée de n années, puis temporaire pendant t années. Il devra donc être payé 1 franc pour la première fois au bout de n années, pour la dernière fois au bout de $n + t - 1$ années, et seulement à condition que la personne actuellement d'âge x soit en vie.

${}_{n|t}A_{x}$ ..... indique la valeur actuelle d'une assurance en cas de décès, de montant *1*, différée de n années, temporaire pendant t années, reposant sur une tête d'âge x. Le capital assuré, 1 franc, devra donc être payé à condition que la personne sur qui repose l'assurance meure entre les âges $x + n$ et $x + n + t$.

${}_kV(A_x)$ ..... indique la réserve mathématique, après k années, d'une assurance simple au décès achetée par une prime unique.

${}_kV_x$ ..... est une abréviation pour ${}_kV(P_x)$, c'est-à-dire pour ${}_kV[P_x(A_x)]$ et indique la réserve mathématique, après k années, d'une assurance simple au décès, achetée par primes annuelles constantes, payables aussi longtemps que vit la personne sur laquelle repose l'assurance.

${}_kV[P_{x;\overline{n}|}(A_{x;\overline{n}|})]$ que l'on abrège en ${}_kV_{x;\overline{n}|}$, indique la réserve mathématique, après k années, d'une assurance mixte, achetée par primes annuelles constantes payables au plus pendant n années, primes reposant sur une tête actuellement d'âge x.

LA RÉSERVE MATHÉMATIQUE

DANS L'ASSURANCE SUR LA VIE

I. INTRODUCTION

Considérations générales.

L'histoire des mathématiques nous montre l'importance des services que de tous temps elles ont rendus à l'humanité. Il n'est guère de domaine où elles n'aient pénétré, et leur utilité s'est révélée parfois de la manière la plus inattendue même dans la solution de problèmes sociaux d'où elles semblaient à tout jamais exclues.

Les mathématiques ont évolué en même temps que les peuples. Dans l'antiquité déjà, la géométrie rendit de grands services. De progrès en progrès, les mathématiques n'ont pas seulement servi de base à la mécanique et à la technique modernes dont l'immense développement nous étonne aujourd'hui ; elles ont trouvé de nouvelles applications dans un domaine que l'on estimait inaccessible à l'intelligence humaine, le domaine des « infiniment petits ». Elles y ont obtenu d'éclatants succès. De fait, l'intervention du calcul infinitésimal en astronomie, physique, mécanique, chimie, est devenue tout à fait indispensable.

Mais c'est peut-être dans la *science actuarielle* que nous saisissons le mieux la singulière universalité des mathématiques.

Cette science rend possible la prévision de certains événements qui semblent produits par le « hasard ». Elle permet, par exemple, de représenter par des formules précises « l'allure de mortalité ».

Voici quelques-unes de ces formules :

(Les cinq premières sont purement empiriques, basées sur l'observation directe des nombres l_x ; les autres, de 6 à 13, sont analytiques, déduites mathématiquement d'une hypothèse simple.)

1. Celle de *de Moivre* (1718) :

$$l_x = a - b \,.\, x, \text{ en particulier } l_x = l_0 \,.\, (86 - x)$$

2. Celle de *Lambert* :

$$l_x = A \,.\, \left(\frac{96 - x}{x}\right)^2 - B \,.\, (e^{-h_1 \,.\, x} - e^{-h_2 \,.\, x})$$

3. Celle de *Wittstein* :

$$l_x = a^{-(M-x)^n} + \frac{1}{m} \cdot a^{-(mx)^n}$$

4. Celle de *Babbage* (1823) :

$$l_x = a - b \,.\, x - c \,.\, x^2 + a' \,.\, x^3 + a'' \,.\, x^4$$

5. Celles de *Moser* :

$$l_x = k \,.\, (a - b \,.\, x^{\frac{1}{n}})$$

et aussi :

$$l_x = a_0 + a_1 \,.\, x^{\frac{1}{4}} + a_2 \,.\, x^{\frac{9}{4}} + a_3 \,.\, x^{\frac{17}{4}} + a_4 \,.\, x^{\frac{25}{4}} + a_5 \,.\, x^{\frac{53}{4}}$$

D'autres courbes empiriques ont été proposées par *Littrow, Lang, Scheffler.*

Des courbes *analytiques*, les principales sont :

6. Celle de *Gauss* :

$$l_x = k \,.\, e^{c \,.\, c^x} - B \,.\, b^x$$

7. Celle de *Gompertz* (1825) :

$$l_x = k \,.\, g^{c^x}$$

8. Celle de *Edmonds* :

$$l_x = e^{\frac{a}{\log p}(1 - p^x)}$$

9. Celle de *Makeham* (1860), qui a permis de représenter très approximativement l'allure de la mortalité pour l'étendue presque entière de la vie humaine (l'enfance exceptée) :

$$l_x = k \,.\, s^x \,.\, g^{c^x}$$

10. Celle de *Lazarus* (1867) :

$$l_x = k \,.\, s^x \,.\, g_1^{c_1^x} \,.\, g_2^{c_2^x} \ldots\ldots\, g_n^{c_n^x}$$

11. Celle de *H. Laurent* (1892) :

$$l_x = A \,.\, e^{-\alpha \,.\, x} + B \,.\, e^{-\beta \,.\, x} + \ldots\ldots + N \,.\, e^{-\nu \,.\, x}$$

où : $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \ldots\ldots,\ \nu > 0.$

12. Celle de *Poterin du Motel* (1893) :

$$l_x = k \,.\, s^x \,.\, g^{x - \mu \,.\, z}$$

x = âge à un instant quelconque,
z = âge au moment de la conclusion du contrat d'assurance.

13. Celles de *M. A. Quiquet,* qui représentent l'allure de mortalité en tenant compte de plusieurs facteurs tels que l'âge, la profession, la contrée habitée, etc. :

$$l_x = k \,.\, s^x \,.\, g_1^{c^x} \,.\, g_2^{x \,.\, c^x} \quad \text{et} \quad l_x = e^{A + B \,.\, x + (C + D \,.\, x + E \,.\, x^2 + \ldots) \,.\, e^{r \,.\, x}}$$

Dans toutes ces formules, x représente l'âge à un instant donné, l_x le nombre des vivants à ce même instant ; toutes les autres lettres représentent des constantes appropriées.

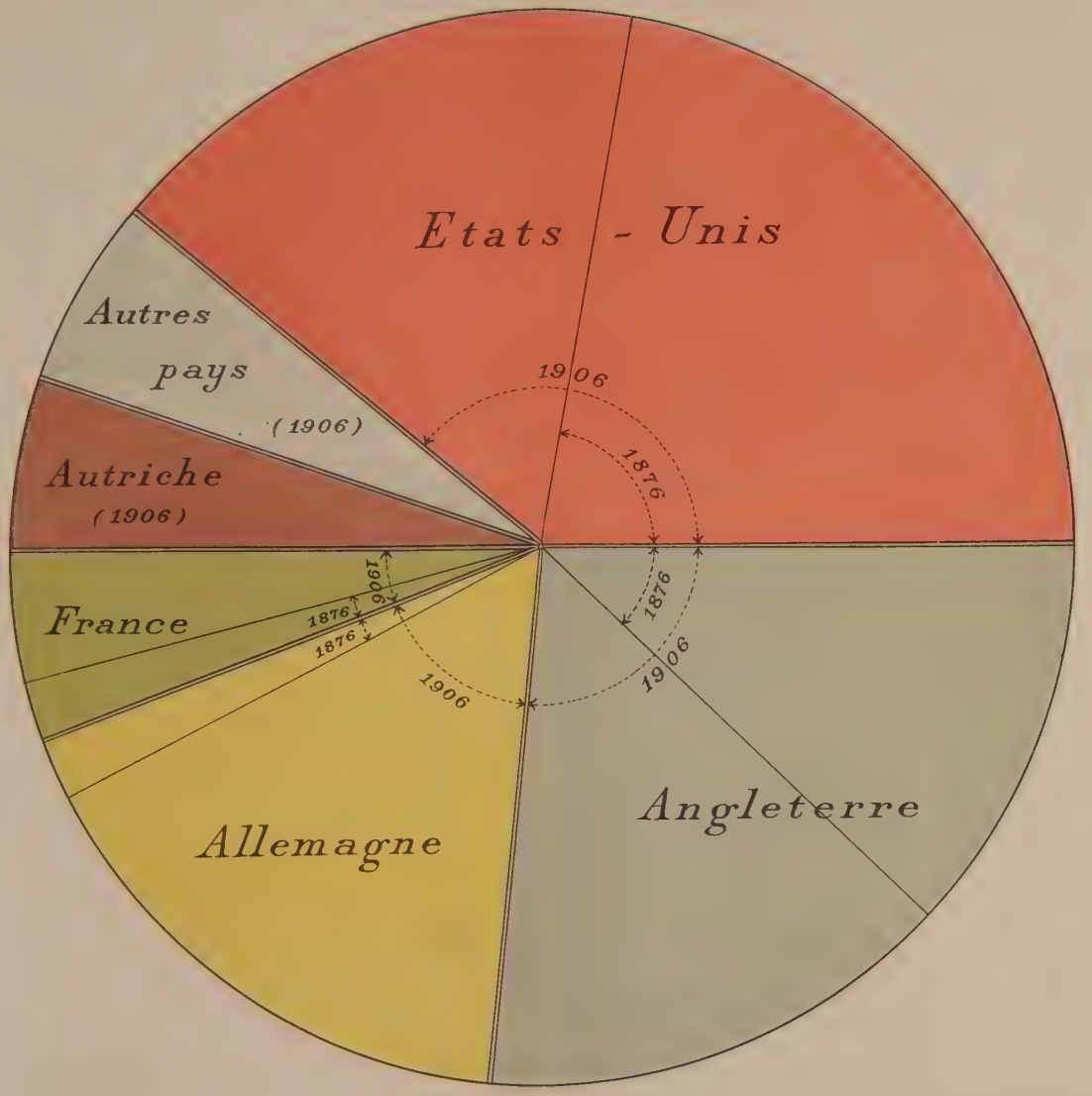
La théorie des probabilités joue, dans les questions d'assurances, un rôle des plus importants. En effet, grâce à la positivité que cette théorie lui a conférée, l'assurance acquiert le caractère d'une science. Les doutes qu'elle pouvait avoir laissé subsister se sont évanouis, et aucun écrivain n'oserait avancer à l'heure actuelle ce qu'*Emérigon* avançait en 1783 : « La vie de l'homme n'est pas un objet de commerce et il est odieux que sa mort devienne la matière d'une spéculation mercantile. »

Bien au contraire, le nombre croissant des sociétés de prévoyance nous prouve qu'elles inspirent de la confiance et que le sentiment de la nécessité de s'assurer devient toujours plus général.

Aujourd'hui, l'assurance sur la vie est extrêmement répandue. Le tableau ci-dessous nous montre que le capital assuré était en 1906 deux fois et demie ce qu'il avait été trente ans auparavant.

	Capitaux assurés en millions de francs.	
	En 1876.	En 1906.
Angleterre	8 000	17 837,295
Autriche		3 759,886
Allemagne	2 250	11 552,525
États-Unis	15 000	26 533.334
France	1 250	3 638,359
Autres pays		3 852,807
	26 500	67 174,206

On trouve, dans toutes les villes importantes de l'Ancien et du Nouveau Monde, des compagnies d'assurances prospères, et



V. page 4.

Alexandre Iranoff, del.

une forte proportion d'habitants assurés. A New-York, par exemple, d'après la *Feuille trimestrielle de la Société coopérative d'assurance et d'épargne des fonctionnaires bulgares* (1911), le 90 °/₀ de la population est assuré (l'enfance exceptée), ce qui constitue un record.

La diffusion croissante de cette institution qui marque dans une certaine mesure le degré de civilisation d'un pays, est due en partie aux perfectionnements qui ont été apportés dans les méthodes de calcul ; ces perfectionnements ont permis d'établir, pour les chances et les hasards de la vie, des schèmes correspondant très exactement à la réalité, et, comme nous l'avons dit plus haut, ils ont conféré à l'assurance la positivité d'une science exacte. Les hommes d'État qui avaient été les plus réfractaires à cette nouvelle science ont fini par lui rendre justice. Dans une discussion à la Sorbonne à propos de l'assurance par l'État, M. *Léon Bourgeois* préconisait les méthodes scientifiques en ces termes :

« La science n'est pas tout ; mais c'est le commencement de tout ; sans elle, aucun progrès, aucune réforme ; sans elle, on peut se livrer aux espérances, aux hypothèses, on ne peut toucher aux réalités. A la Chambre, nous nous occupons des questions de prévoyance, de mutualité ; nous cherchons à mettre sur le papier les lois nécessaires pour assurer la vieillesse contre la maladie, le chômage ; pour assurer l'homme contre les dommages que la nécessité des forces de la nature lui impose, et nous rencontrons des groupes pleins d'ardeur, de bonne volonté, de générosité, mais ignorant certaines conditions scientifiques, ignorant les tables de la mortalité et les taux, et les tarifs que les sociétés d'assurance peuvent seules faire calculer. Et nous disons à ces groupes : Prenez garde ; vous avez marché avec une foi généreuse, un entrain, une cordialité et un sentiment d'humanité auxquels nous rendons pleine justice ; mais sans ce fil conducteur que la science sereine et abstraite peut seule vous donner avec certitude, prenez garde, vous allez trébucher dans le chemin et vous allez entraîner avec vous tous vos amis. »

Note historique.

On a donc reconnu qu'il était de toute nécessité de donner une base mathématique à l'assurance ; nous vouons une reconnaissante admiration à ceux qui, en poursuivant ce but, ont créé la *science actuarielle.*

L'un des plus grands géomètres que la France ait produits, *Blaise Pascal* (1623-1662), doit être considéré comme le véritable fondateur du calcul des probabilités. Il fut engagé par un joueur à déterminer numériquement les différentes chances qu'offrait le jeu de dés. Il résolut la question (1654) et publia le résultat de ses recherches sous le titre de « Géométrie du hasard ».

La question fut reprise par *Pierre de Fermat* (1601-1665), conseiller au Parlement de Toulouse. Celui-ci appliqua le premier la théorie des combinaisons au calcul des probabilités.

Le Hollandais *Christian Huygens* (1629-1665), physicien, géomètre et astronome, publia sur les jeux de hasard un petit traité intitulé *De Ratiociniis in ludo aleae,* c'est-à-dire « Sur les partages dans le jeu de dés ». Cet ouvrage l'a fait considérer comme fondateur de la théorie des probabilités. Ce traité purement mathématique indiqua la voie qui devait conduire plus tard aux plus importants résultats dans le domaine de l'assurance sur la vie.

Dans la suite, une longue série de mathématiciens (Dr *Price, Bernoulli, Léonard Euler, Poisson, Laplace,* pour ne citer que les plus illustres) développèrent la théorie des probabilités ; ces savants ont ainsi contribué à la création de la science actuarielle qui constitue une nouvelle branche des mathématiques appliquées et qui a pris une importance capitale, comme base pour la solution rationnelle des questions d'assurance.

Le premier qui ait songé à proposer la science économique comme but au calcul des probabilités, est *Jean de Witt* (1625-

1672), président de la République hollandaise, aussi distingué par ses connaissances étendues que par ses talents politiques. Il eut l'idée de calculer, au moyen de la théorie de *Pascal* et de *Huygens,* les chances qu'il pourrait y avoir, pour chaque âge, de mourir dans un laps de temps déterminé. En collaboration avec le géomètre *Johannes Hudde* (1628-1704), bourgmestre d'Amsterdam, il forma, en se servant des registres d'état-civil de plusieurs villes hollandaises, une table où la probabilité de vie était déterminée pour chaque âge de la vie. Cette table est néanmoins fantaisiste et n'a qu'un intérêt historique. S'appuyant sur ces données, il évalua ensuite la valeur des rentes viagères constituées sur des têtes de chaque âge (semestre par semestre).

En 1671, *J. de Witt* adressa aux États généraux son mémoire intitulé : *Valeur des rentes viagères en proportion des rentes amortissables*, pour les mettre à même de ne pas contracter des emprunts publics en rentes viagères trop onéreux. Malheureusement, il fut massacré l'année suivante, dans une émeute provoquée par les orangistes, et son mémoire fut interdit. Ce n'est qu'en 1851 que l'Anglais *Frederik Hendriks,* ayant retrouvé, après de longues recherches dans des archives hollandaises, un exemplaire complet de l'ouvrage de *de Witt*, le publia en entier dans le *Assurance Magazine,* vol. II, p. 222 et suivantes.

« Son traité des Rentes viagères, dit *Cornélius Waldford* [1], a été le premier ouvrage sur ce sujet, et une période de deux siècles n'en a pas diminué l'importance aux yeux des critiques savants et compétents. »

On a longtemps prétendu que l'assurance sur la vie, à base scientifique, avait fait sa première apparition en Angleterre, avec la fondation de l'*Amicable Society*, vers 1706. C'est une erreur, bien que les premières «sociétés» d'assurance sur la vie aient été fondées en Angleterre, parce que, en 1706, la véritable

[1] *Insurance Guide and Handbook.* 2e édition, 1867. Voyez HAMON : *Histoire générale de l'assurance*, page 75.

notion de cette assurance n'existait pas encore. Les « tontines » françaises n'étaient que des opérations où l'on se bornait à la répartition, au bout d'un nombre déterminé d'années, d'un capital de rentes entre les prêteurs survivants. Elles étaient donc l'antithèse absolue de l'assurance en cas de décès.

La première table de mortalité avait été établie, il est vrai, en 1693, par l'astronome *Edmond Halley* (1656-1742), d'après des observations faites à Breslau par l'ecclésiastique *Caspar Neumann* (1648-1715), de 1687 à 1691. Ce n'est pas avec ces éléments encore confus que l'assurance sur la vie pouvait se constituer, et « l'Amicable » de 1706 ne fut, à vrai dire, qu'une association tontinière réalisant une des conditions de l'assurance sur la vie : le partage du fonds commun non plus entre les survivants, mais entre les représentants des décédés. Un historien des assurances, M. *Auguste Hendrick,* a signalé le fait que « l'Amicable », fondée sous la forme mutuelle, n'avait pas le pouvoir de garantir des assurances sur la vie à des taux de primes calculés suivant l'âge, ni pour des sommes déterminées. Ainsi, à cette époque, l'assurance « vie entière » qui constitue la principale opération de nos compagnies n'était pas pratiquée, et les tarifs de primes calculés d'après l'âge des assurés n'étaient pas connus.

A quelle époque apparut la première et véritable compagnie d'assurances sur la vie, celle qui a servi de type et de modèle à nos institutions ? En 1762, lors de la fondation de la société *Equitable* en Angleterre. Les fondateurs de cette société s'appuyaient sur le premier tarif de primes, gradué d'après l'âge des assurés, qu'avait établi *James Dodson* sur les indications du célèbre mathématicien *Thomas Simpson* et d'après la table de mortalité de Londres. D'autre part, ils offraient d'assurer un capital minimum payable aux héritiers de l'assuré, après la mort de celui-ci, à quelque moment qu'elle arrivât, le risque s'étendant depuis la date de l'assurance jusqu'au terme extrême de la vie. M. *Hendrick* a pu dire que ce système n'avait été proposé par aucune compagnie, ni examiné par aucune législation

en Europe avant l'année 1760, lors de la discussion que souleva la pétition au gouvernement des fondateurs de l'*Equitable*.

Depuis cette date, la vérité scientifique a remplacé, dans les assurances, l'incertitude empirique.[1]

C'est en Prusse que se trouve le premier code d'assurance sur la vie : « Allgemeines Landrecht », ou code du droit commun, promulgué en 1794.

Objet de l'assurance.

L'assurance a pour but de couvrir un risque quelconque. Les divers systèmes d'assurance se basent sur un même principe qu'on pourrait appeler le « principe de l'équilibre ». L'exemple suivant fera comprendre ce que nous entendons, mieux que toutes les explications. Quelqu'un met en loterie un bijou d'une valeur de fr. 1000,— pour lequel il distribue mille billets de un franc. La loterie se tire, l'un gagne le bijou et les autres perdent la petite somme d'un franc, mais le fondateur de la loterie ne perd ni ne gagne; pour lui, il y a équilibre entre recettes et dépenses.

Dans l'assurance, un dommage survenu est un billet gagnant. Le rôle de l'assureur est de répartir le coût du dommage proportionnellement au montant des primes versées par les assurés.

Toutefois, une particularité essentielle distingue l'assurance sur la vie des autres assurances : c'est la loi de mortalité qui intervient nécessairement pour tous les hommes. Cela étant, il a été possible, après beaucoup d'observations, d'établir méthodiquement son « allure » par des formules; dans les autres assurances, au contraire, interviennent des événements que, vu leur caractère purement aléatoire, il n'est pas possible de soumettre à des règles quant à leur fréquence.

[1] W. Morgan. *Esquisse de l'origine et des progrès de l'Equitable et des causes qui ont contribué à son succès.*

Les faits suivants font ressortir la différence entre l'assurance sur la vie et les autres assurances.

Les navires de la puissante compagnie de navigation *Cunard* font un service régulier, devenu hebdomadaire, entre Liverpool et New-York ou Boston. Depuis sa fondation, et pendant une période de quarante années, cette compagnie ne perdit aucun de ses beaux et rapides navires, bien qu'ils eussent effectué la traversée plus de mille fois ; elle n'eut à déplorer la mort par accident de mer d'aucun homme de ses équipages, ni d'un seul de ses innombrables passagers.

Ce fait, unique dans les annales maritimes, constitue une chance quasi invraisemblable.

Une compagnie anglaise concurrente avait fait construire, selon toutes les règles de l'art, de beaux navires pourvus des meilleurs certificats. En quelques années, elle en a perdu six sur sept. Quatre équipages comprenant ensemble 145 hommes et 93 passagers ont péri d'une façon mystérieuse et tragique : on n'en eut jamais des nouvelles.

La récente catastrophe du « Titanic » que personne n'a oubliée, et celle plus récente du « Lusitania » (de la compagnie *Cunard*) sont des plus significatives à l'égard des risques courus par les compagnies d'assurance-accidents. Le premier de ces deux paquebots géants sombra, comme on sait, pendant sa première traversée, en dépit de toute la perfection apportée à sa construction, et sa perte coûta une somme de 50 millions aux sociétés d'assurance maritime.

Des risques semblables n'existent guère dans l'assurance sur la vie. On ne cite pas, dans son histoire, une société qui n'ait pas enregistré dans un intervalle de quarante ans le décès d'un seul de ses assurés ; le cas contraire, soit celui où tous les assurés seraient décédés en même temps, ne s'est pas davantage présenté.

En comparant entre elles les différentes tables de mortalité adoptées par les sociétés modernes d'assurance sur la vie, nous constatons pendant les premières années des écarts

qui vont en diminuant à mesure qu'on se rapproche du terme de la vie.

Les tables adoptées par certaines sociétés d'assurance lors de leur fondation correspondent approximativement à la réalité ; pour d'autres, un écart se produit dans un sens ou dans l'autre. C'est ainsi que certaines sociétés prospèrent dès le début, et que d'autres périclitent rapidement.

Si, au point de vue scientifique, l'assurance sur la vie est la plus positive, c'est-à-dire la plus solidement assise, au point de vue social, ses effets sont tout aussi réels. Elle crée un nouveau groupement des intérêts humains. Les assurés forment une grande famille dont les membres s'entr'aident mutuellement. C'est l'application du principe de *solidarité* qui oriente les hommes vers la formation d'une société nouvelle. De plus, cette assurance doit être considérée comme une institution humanitaire par la protection efficace qu'elle accorde aux veuves et aux orphelins ; elle joue, en conservant les existences faibles ou menacées, un rôle appréciable au sein de la société.

L'assurance est préférable à l'épargne. On s'en convaincra par l'exemple suivant : Deux personnes, A et B, âgées toutes deux de trente ans, désirent laisser après leur décès une somme de Fr. 10 000,— pour l'éducation de leurs enfants. La première, A, contracte une assurance sur la vie et paie une prime annuelle de Fr. 208,— (d'après le tarif de la « Société coopérative d'assurance et d'épargne des fonctionnaires bulgares »). L'autre, B, place chaque année dans une maison de banque cette même somme de Fr. 208,— au taux de 4 %.

Si le décès des deux personnes survient au bout d'un an, la première laisse un capital de Fr. 10 000,— tandis que la seconde ne laisse que Fr. 216,—. Si la mort survient après cinq ans, la première laisse Fr. 10 024,— et la seconde Fr. 1 126,57.

Le tableau ci-après nous indique la marche des sommes laissées aux héritiers dans les deux cas.

Si la mort survient après :	Somme laissée aux héritiers par la Personne A	Personne B
1 an	10 000,—	216,—
5 ans	10 024,—	1 126,57
10 »	10 124,—	4 164,80
20 »	10 500,—	6 133,70
25 »	10 800,—	8 660,70
30 »	11 100,—	11 400,—

Ainsi, les capitaux obtenus respectivement par l'assurance et par l'épargne deviennent équivalents après une période d'environ 30 ans. A partir de cette date, l'avantage est à l'épargne ; toutefois, cet avantage est aléatoire si l'on considère que le risque sur lequel il se base s'étend sur un tiers de la vie humaine, et l'on préfère, le plus souvent, sacrifier un bénéfice pécuniaire aussi aléatoire à la sécurité que procure l'assurance sur la vie, même contractée à des taux de prime relativement élevés.

Bases de l'assurance sur la vie.

1. La base essentielle d'une compagnie d'assurance sur la vie doit être *une table de mortalité parfaitement établie,* c'est-à-dire correspondant aussi exactement que possible à l'allure de mortalité du pays où la société opère. Nous possédons aujourd'hui des tables de mortalité qui satisfont à cette importante condition.

Comme tables principales de mortalité, on peut citer :

En **Angleterre** : *La table* H^m (1869) qui fut la première établie par des procédés rationnels et sur des données statistiques certaines ; elle est un des plus beaux monuments de la science actuarielle ; elle traduit l'allure de mortalité propre aux assurés anglais du sexe masculin.

La table H^f indiquant l'allure de mortalité des assurés anglais du sexe féminin.

La table H^{mf} indiquant l'allure de mortalité anglaise, sexes réunis.

La table $H^{m(5)}$ indiquant l'allure de mortalité des hommes assurés auprès des compagnies anglaises, à partir d'un délai de 5 ans après la conclusion du contrat d'assurance. Ces quatre tables, dressées par l'*Institute of Actuaries* en Angleterre, sont les premières établies entièrement selon des méthodes mathématiquement rigoureuses.

La table de Finlaison (pour hommes) construite avec les éléments fournis par les rentiers viagers du gouvernement britannique.

En **France** : *La table des assurés français* (table A. F.) et celle des *rentiers français* (table R. F.), valables pour l'allure de mortalité en France, sexes réunis. La table A. F. (mortalité relativement rapide) s'emploie pour les assurances en cas de décès, et la table R. F. (mortalité relativement lente) pour les assurances en cas de vie. Il est regrettable qu'on ait dressé les tables seulement pour les sexes réunis, sans établir aussi : une table d'assurés du sexe masculin ; une table d'assurés du sexe féminin ; une table de rentiers du sexe masculin ; enfin une table de rentiers du sexe féminin.

La table de la Caisse nationale des retraites (table C. R.) de 1887 ; elle est à périodicité trimestrielle (toutes les autres tables citées ici sont à périodicité annuelle).

En **Allemagne** : Les *tables des 23 compagnies allemandes ;* elles comprennent :

Les tables *M. I*, *W. I*, *MW. I*, qui concernent respectivement les hommes, les femmes, les sexes réunis, assurés à la suite d'un examen médical complet et dans des conditions normales.

Les tables *M. II*, *W. II*, *MW. II*, qui concernent respectivement les hommes, les femmes, les sexes réunis, assurés à la suite d'un examen médical complet, mais moyennant des primes supplémentaires.

Les tables *M. III*, *W. III*, *MW. III*, qui concernent respectivement les hommes, les femmes, les sexes réunis, assurés à la suite d'un examen médical seulement partiel.

Les tables *M. IV*, *W. IV*, *MW. IV*, qui concernent respectivement les hommes, les femmes, les sexes réunis, assurés sans aucun examen médical.

En **Belgique** : La table de *Quetelet*.

En **Hollande** : Deux tables excellentes : l'une calculée pour des têtes choisies (rentiers de l'État) par *Kerseboom* (1748). L'autre, plus récente, de M. *de Baumhauer*, directeur de la statistique au ministère de l'Intérieur, basée sur les décès et les recensements par âge.

En **Autriche** : La table des décès par âge, établie par *Joseph Haim*, dans sa statistique de l'Autriche (1852), et celle de M. *Schimmer* (1869).

En **Italie** : La table de M. *William Rey* (1867), ancien directeur de la compagnie royale d'assurances de Milan.

En **Scandinavie** : La table de *Wargentin ;* puis celles de « Hafnia », plus modernes, ajustées par *T. N. Thiele* se basant sur les observations des sociétés scandinaves d'assurance.

En **Suisse** : *La première table de mortalité*, embrassant la population et les décès de toute la Suisse, dressée par le Bureau fédéral de statistique sur la base des résultats du recensement de la population de 1880 et des décès des années 1876-1877 à 1880-1881. Elle a été calculée, en 1883, d'après la méthode de *Zeuner* et non ajustée. M. *G. Schaertlin* se chargea, en 1887, d'ajuster les chiffres de la table de mortalité dressée en 1883 par le Bureau fédéral suisse de statistique. Ce travail, exécuté d'après la méthode *Woolhouse*, a été publié dans le *Journal de statistique suisse*, année 1887, p. 330, et année 1888, p. 283.

La deuxième table de mortalité, basée sur les résultats des années 1881-1888, est contenue dans l'ouvrage intitulé : *Mariages, naissances et décès en Suisse de 1871 à 1890* (III^{ième} partie).

La troisième table de mortalité ; elle comprend les années 1889-1900, soit une période duodécennale. Les calculs ont été effec-

tués d'après la méthode de *Böckh*, et l'ajustement d'après celle de *Woolhouse*. (C'est la 185ième livraison de la *Statistique de la Suisse* [Berne, 1913] publiée par le bureau de statistique du Département fédéral de l'Intérieur.)

Aux **États-Unis** : La table de la *Mutual life* de New-York, celle de *Homans*, et celle, plus importante, que MM. *Lévi* et *Meech* ont publiée dans l'ouvrage intitulé : *Systèmes et tables d'assurance sur la vie*.

L'allure de mortalité suit la table choisie d'autant plus exactement que le nombre des assurés est plus grand. Ce nombre est donc aussi un facteur important pour l'exactitude de la table choisie. En acquérant une clientèle aussi nombreuse que possible, les compagnies ont l'avantage de rendre plus vraisemblables et moins aléatoires les résultats de leurs calculs en même temps que celui d'augmenter le roulement de leurs affaires.

On a démontré que la sûreté des prévisions n'augmente pas seulement en proportion directe du nombre des assurés, mais en raison du carré de ce nombre.

On a calculé, d'après la table H^m, que si cinq personnes, sur 1000 âgées de vingt ans, meurent dans le courant d'une année, la compagnie qui n'aurait que 1000 assurés et qui ne leur aurait demandé comme prime que $^5/_{1000}$ de la somme assurée, serait à peu près certaine de voir son calcul promptement déjoué par les événements ; si elle avait 10 000 assurés, les chances d'exactitude seraient non décuplées, mais centuplées ; si elle en avait 1 000 000, ces chances seraient un million de fois plus grandes. Ainsi, l'effet du hasard serait visiblement éliminé.

2. Le choix d'un *taux d'intérêt* convenable joue aussi, comme base de l'assurance, un rôle important. En général, les contrats se concluent pour un long délai. Or, le taux de l'argent sur le marché financier varie continuellement. Pour cette raison, il est difficile aux compagnies de choisir un taux correspondant exactement au rendement des capitaux qu'elles sont appelées à faire fructifier. Or, pour dresser des tarifs, il faut un taux stable

comme base. Le souci de leur solidité oblige les compagnies d'assurances à adopter, pour leurs calculs, des taux de 1 à 2 % inférieurs à ceux du marché financier.

3. La troisième base pour les calculs de l'actuaire consiste dans le *chargement des primes*, chargement dont le but est de couvrir tous les frais de la société, à savoir : frais d'acquisition ; frais d'encaissement de primes ; frais de gestion et d'administration générale ; éventuellement encore : bénéfices ou dividendes à distribuer.

Mais la question la plus importante de l'assurance sur la vie et qui en est en quelque sorte la pierre angulaire, est celle que nous allons développer plus longuement dans le chapitre suivant, la *réserve mathématique*.

II. RÉSERVE MATHÉMATIQUE

Comme nous l'avons dit, la base de l'assurance sur la vie est de maintenir « l'équilibre » entre assurés et assureur. Mais, dans la pratique, cet équilibre se rompt, ou ne s'établit qu'à certains moments et passagèrement, par le fait des facilités de versement accordées par l'assureur à l'assuré. Ainsi, l'assuré peut se libérer : ou bien d'un seul coup de tous ses engagements envers l'assureur, en lui versant une prime unique, ou bien par le versement de primes annuelles. Chacune des primes versées n'est pas destinée uniquement à couvrir le risque de l'année correspondante ; ce risque varie d'année en année, il croît ou diminue d'après les âges des assurés et d'après les combinaisons adoptées.

Ces variations du risque annuel sont démontrées par les deux exemples ci-après :

I^er^ exemple. Supposons qu'une personne de 25 ans souscrive une assurance « vie entière » au capital de 10 000 francs, auprès d'une compagnie dont le tarif est calculé sur la table A. F. et avec le taux de capitalisation de $3\,^1/_2\,^0/_0$ l'an.

La prime annuelle pure constante de ce contrat est :

$$P_{25} = 10\,000 \cdot \frac{M_{25}}{N_{25}} = 10\,000 \cdot \frac{106\,104{,}8}{6\,886\,089{,}3} = \text{Fr. } 154{,}10$$

La prime de Fr. 154,10 est-elle suffisante pour couvrir le risque annuel couru par la compagnie ? La prime est trop forte dans les premières années ; dans les dernières, elle est trop faible. C'est ce que montre le tableau ci-dessous.

Prime naturelle.

Définition : La *prime naturelle* est la somme juste nécessaire pour couvrir les risques que court l'assureur pendant 1 an. La prime naturelle est donc directement proportionnelle au risque annuel, puisqu'elle le couvre exactement ; elle augmente et diminue avec lui et peut servir à le mesurer.

Nous désignons ici la prime naturelle par P. nat.

En calculant la prime naturelle pour l'exemple ci-dessus, on trouve pour les divers âges les résultats suivants :

$$\text{P. nat.}_{25} = 10000 \cdot \frac{M_{25} - M_{26}}{D_{25}} = \text{Fr. } 61{,}81$$

$$\text{P. nat.}_{26} = 10000 \cdot \frac{M_{26} - M_{27}}{D_{26}} = \text{Fr. } 62{,}90$$

$$\text{P. nat.}_{27} = 10000 \cdot \frac{M_{27} - M_{28}}{D_{27}} = \text{Fr. } 64{,}15$$

. . . . . .

$$\text{P. nat.}_{35} = 10000 \cdot \frac{M_{35} - M_{36}}{D_{35}} = \text{Fr. } 79{,}33$$

. . . . . .

$$\text{P. nat.}_{45} = 10000 \cdot \frac{M_{45} - M_{46}}{D_{45}} = \text{Fr. } 121{,}47$$

. . . . . .

$$\text{P. nat.}_{48} = 10000 \cdot \frac{M_{48} - M_{49}}{D_{48}} = \text{Fr. } 143{,}10$$

$$\text{P. nat.}_{49} = 10000 \cdot \frac{M_{49} - M_{50}}{D_{49}} = \text{Fr. } 151{,}68$$

$$\text{P. nat.}_{50} = 10000 \cdot \frac{M_{50} - M_{51}}{D_{50}} = \text{Fr. } 161{,}—$$

. . . . . .

$$\text{P. nat.}_{55} = 10000 \cdot \frac{M_{55} - M_{56}}{D_{55}} = \text{Fr. } 222{,}—$$

. . . . . .

$$\text{P. nat.}_{65} = 10000 \cdot \frac{M_{65} - M_{66}}{D_{65}} = \text{Fr. } 459{,}55$$

. . . . . .

$$\text{P. nat.}_{75} = 10000 \cdot \frac{M_{75} - M_{76}}{D_{75}} = \text{Fr. } 1006{,}80$$

. . . . . .

$$\text{P. nat.}_{85} = 10000 \cdot \frac{M_{85} - M_{86}}{D_{85}} = \text{Fr. } 2075{,}82$$

. . . . . .

$$\text{P. nat.}_{95} = 10000 \cdot \frac{M_{95} - M_{96}}{D_{95}} = \text{Fr. } 4438{,}90$$

. . . . . .

$$\text{P. nat.}_{98} = 10000 \cdot \frac{M_{98} - M_{99}}{D_{98}} = \text{Fr. } 5326{,}—$$

*II*ième *exemple.* Un père contracte, sur la tête de son enfant âgé d'un an, une assurance temporaire en cas de décès, du montant de Fr. 10 000,—, pour une durée de 10 ans. Table A. F. et taux $3\,{}^1/_2\,{}^0/_0$. Les primes, annuelles et constantes, sont dues pendant 10 ans au plus et reposent sur la tête de l'enfant.

La prime annuelle pure constante de ce contrat se calcule d'après la formule :

$$ {}_{10}P_1(|_{10}A_1) = 10\,000 \cdot \frac{M_1 - M_{11}}{N_1 - N_{11}} = \text{Fr. } 117{,}03 $$

Le risque annuel varie d'année en année, comme le prouve le tableau suivant :

$$ \text{P. nat.}_1 = 10\,000 \cdot \frac{M_1 - M_2}{D_1} = \text{Fr. } 270{,}18 $$

$$ \text{P. nat.}_2 = 10\,000 \cdot \frac{M_2 - M_3}{D_2} = \text{Fr. } 204{,}97 $$

$$ \text{P. nat.}_3 = 10\,000 \cdot \frac{M_3 - M_4}{D_3} = \text{Fr. } 154{,}77 $$

$$ \text{P. nat.}_4 = 10\,000 \cdot \frac{M_4 - M_5}{D_4} = \text{Fr. } 116{,}64 $$

$$ \text{P. nat.}_5 = 10\,000 \cdot \frac{M_5 - M_6}{D_5} = \text{Fr. } 88{,}20 $$

$$ \text{P. nat.}_6 = 10\,000 \cdot \frac{M_6 - M_7}{D_6} = \text{Fr. } 67{,}53 $$

$$ \text{P. nat.}_7 = 10\,000 \cdot \frac{M_7 - M_8}{D_7} = \text{Fr. } 53{,}07 $$

$$\text{P. nat.}_8 = 10\,000 \cdot \frac{M_8 - M_9}{D_8} = \text{Fr. } 43{,}60$$

$$\text{P. nat.}_9 = 10\,000 \cdot \frac{M_9 - M_{10}}{D_9} = \text{Fr. } 38{,}10$$

$$\text{P. nat.}_{10} = 10\,000 \cdot \frac{M_{10} - M_{11}}{D_{10}} = \text{Fr. } 35{,}78$$

On voit, par ces exemples, la différence entre les primes annuelles effectivement versées et le risque annuel couru par l'assureur.

Dans le premier exemple, au début, la prime annuelle est comparativement plus forte que le risque annuel. Quand l'âge de l'assuré atteint 49 ans, le risque annuel couru par l'assureur est approximativement égal à la prime; à partir de ce moment, la différence augmente en sens inverse. Ainsi, quand l'assuré atteint 65 ans, le risque devient sept fois plus élevé qu'à 25 ans ; à l'âge de 85 ans, 33 fois plus élevé, et ainsi de suite.

Le second exemple illustre le cas contraire ; au commencement, la prime annuelle est loin de couvrir le risque. Pour la première année, la différence est de Fr. 153,15 ; par contre, la dernière année, il y a un excédent de Fr. 81,25.

Ces exemples nous montrent clairement qu'il y a inégalité entre les engagements des deux parties pendant une fraction du temps que dure le contrat. En général, au début, les recettes de l'assureur sont plus grandes que le risque couru par lui ne l'exigerait. Donc, ces trop-perçus doivent être mis en réserve par l'assureur, pour constituer un fonds qui s'emploiera quand les dépenses de l'assureur excèderont ses recettes. En d'autres termes : cette réserve « équilibre » les engagements entre les assurés et l'assureur.

La réserve mathématique d'une police d'assurance sur la vie est donc la différence entre les valeurs actuelles des engagements réciproques de l'assureur et de l'assuré.

Pour concrétiser la réserve mathématique, MM. *Richard* et *Émile Petit* ont fait, dans leur traité *Théorie mathématique des assurances*, la comparaison suivante :

« La réserve mathématique agit comme ces réservoirs qui, dans les canalisations urbaines hydrauliques, sont ménagés sur le parcours de la conduite et où vient s'accumuler, en temps de pluie, l'eau qui sera mise en distribution à l'époque de la sécheresse, en sorte que rien ne soit changé dans le régime des fontaines et que le consommateur ne soit nullement incommodé par les variations hygrométriques. Qui oserait prétendre que de tels réservoirs ne sont pas indispensables au bon fonctionnement de la canalisation ? »

Nous commencerons par indiquer comment on peut calculer la réserve d'un contrat donné. Une première méthode générale est :

La méthode prospective.

Voici la définition qui lui a valu ce nom : On appelle « réserve mathématique » ou « réserve moyenne » ou encore « réserve individuelle » d'un contrat d'assurance, à une époque d'inventaire arbitrairement choisie, l'excédent des valeurs actuelles, prises à cette époque d'inventaire, des engagements partiels de l'assureur sur ceux de l'assuré, pour la durée *restant à courir* jusqu'à l'expiration du contrat. Donc :

$$\textit{Réserve mathématique} = \sum \left(\begin{array}{l} \text{Valeurs actuelles des engagements futurs de l'assureur, escomptés à l'époque d'inventaire.} \end{array} \right) - \sum \left(\begin{array}{l} \text{Valeurs actuelles des engagements futurs de l'assuré, escomptés à l'époque d'inventaire.} \end{array} \right)$$

Or, les engagements de l'assureur constituent, pour lui, des dépenses, et les engagements de l'assuré constituent, pour l'assureur, autant de recettes.

On peut donc aussi écrire cette formule :

$$\textit{Réserve mathématique} = \sum \left(\begin{array}{l}\text{Dépenses futures de l'as-}\\ \text{sureur escomptées à l'épo-}\\ \text{que d'inventaire.}\end{array}\right) - \sum \left(\begin{array}{l}\text{Recettes futures de l'assu-}\\ \text{reur escomptées à l'épo-}\\ \text{que d'inventaire.}\end{array}\right)$$

Cette méthode est la plus employée dans la pratique.

Pour expliquer cette méthode, nous nous servirons des quelques exemples suivants.

Premier exemple.

Quelle est la réserve mathématique, au bout de la $n^{\text{ième}}$ année, d'une assurance simple en cas de décès, du montant de 1, reposant sur une tête actuellement d'âge x ? En supposant que cette assurance soit achetée :

1. par une prime unique ;
2. par primes échelonnées.

I^er^ cas, prime unique. Pour appliquer la formule ci-dessus, nous devons nous demander :

1. Quelles sont, en valeur actuelle, les dépenses futures de l'assureur à l'époque d'inventaire ?

Réponse : A_{x+n}

2. Quelle est la valeur actuelle des recettes futures de l'assureur à la même époque ?

Réponse : Zéro, parce que l'assuré s'est libéré de ses engagements en une seule fois. C'est-à-dire que la réserve mathématique se monte à A_{x+n}, ou bien, en formules :

$$_nV(A_x) = A_{x+n} = \frac{M_{x+n}}{D_{x+n}}$$

II^me^ cas, primes échelonnées. Les dépenses futures de l'assureur sont les mêmes que dans le premier cas, savoir : A_{x+n}

Les recettes futures, par contre, sont les primes payées par l'assuré ; leur valeur actuelle est : $P_x \cdot a_{x+n}$, de sorte que la réserve mathématique devient :

$$ {}_nV_x = A_{x+n} - P_x \cdot a_{x+n} = \frac{M_{x+n}}{D_{x+n}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+n}}{D_{x+n}} $$

$$ = \frac{M_{x+n} \cdot N_x - N_{x+n} \cdot M_x}{N_x \cdot D_{x+n}} $$

Second exemple.

Quelle est la réserve mathématique, au bout de r années, d'une assurance dotale d'une durée de n années, avec remboursement des primes payées au cas où l'assuré, actuellement d'âge x, viendrait à mourir avant l'échéance du contrat reposant sur sa tête ? L'assurance est supposée achetée :

1. par une prime unique ;
2. par primes échelonnées.

I^er^ cas, prime unique. La prime unique se calcule par la formule :

$$ P = \frac{D_{x+n}}{D_x - M_x + M_{x+n}} $$

Pour appliquer la méthode prospective, nous devons nous demander :

Quels sont les dépenses futures de l'assureur ?

a) Si l'assuré meurt avant l'échéance du contrat, au cours des $(n—r)$ années qui restent encore à courir, l'assureur doit rembourser la prime unique P. Valeur actuelle de cette somme à l'époque d'inventaire :

$$ P \cdot |_{n-r}A_{x+r} $$

b) Si l'assuré vit à l'échéance du contrat, il recevra le capital 1. La valeur actuelle de ce capital 1, escomptée à cette

même époque d'inventaire, est, puisque ce capital n'est exigible qu'en cas de vie :

$$_{n-r}E_{x+r}$$

Les sommes sous *a)* et *b)* donnent, en valeur actuelle, le total des engagements futurs de l'assureur :

$$P \,.\, |_{n-r}A_{x+r} + {}_{n-r}E_{x+r}$$

Quant aux recettes futures, dans ce cas aussi, elles se montent à zéro. Donc, la réserve cherchée est :

$$_rV = P \,.\, |_{n-r}A_{x+r} + {}_{n-r}E_{x+r}$$

$$= \frac{D_{x+n}}{D_x - M_x + M_{x+n}} \cdot \frac{M_{x+r} - M_{x+n}}{D_{x+r}} + \frac{D_{x+n}}{D_{x+r}}$$

$$= \frac{D_{x+n}}{D_{x+r}} \cdot \frac{D_x - M_x + M_{x+r}}{D_x - M_x + M_{x+n}}$$

II^me cas, primes échelonnées.

La valeur actuelle des *dépenses futures* de l'assureur se détermine ainsi :

a) Désignons par $_nP_x$ le montant de la prime annuelle constante, payable aussi longtemps que vit l'assuré *(x)*, mais au plus n fois. Si l'assuré meurt au cours de la $(r+1)^{ième}$ année, l'assureur doit rembourser toutes les primes payées jusqu'alors ; valeur actuelle de cet engagement, escomptée à l'époque d'inventaire :

$$(r+1) \cdot {}_nP_x \,.\, |_1A_{x+r}$$

Si l'assuré meurt au cours de la $(r+2)^{ième}$ année, l'assureur doit rembourser toutes les primes payées jusqu'alors ; valeur actuelle de cet engagement, escomptée à l'époque d'inventaire :

$$(r+2) \cdot {}_nP_x \cdot {}_1|_1A_{x+r}$$

Si l'assuré meurt au cours de la $(r+3)^{\text{ième}}$ année, l'assureur doit rembourser toutes les primes payées jusqu'alors. Valeur actuelle de cet engagement, escomptée à l'époque d'inventaire :

$$(r+3) \cdot {}_{n}P_{x} \cdot {}_{2}|_{1}A_{x+r}$$

. . . . . .

. . . . . .

Si l'assuré meurt au cours de la $(r+\lambda)^{\text{ième}}$ année, l'assureur doit rembourser toutes les primes payées jusqu'alors. Valeur actuelle de cet engagement, escomptée à l'époque d'inventaire :

$$(r+\lambda) \cdot {}_{n}P_{x} \cdot {}_{\lambda-1}|_{1}A_{x+r}$$

. . . . . .

. . . . . .

Enfin, si l'assuré meurt au cours de la $n^{\text{ième}}$ année, l'assureur doit rembourser toutes les primes payées. Valeur actuelle de cet engagement, escomptée au même moment :

$$n \cdot {}_{n}P_{x} \cdot {}_{n-r-1}|_{1}A_{x+r}$$

Pour abréger, nous pouvons écrire, puisque ${}_{n}P_{x}$ est constant, que la somme des valeurs actuelles ci-dessus est :

$${}_{n}P_{x} \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n-r} (r+\lambda) \cdot {}_{\lambda-1}|_{1}A_{x+r}$$

b) Si l'assuré vit à l'échéance du contrat, l'assureur paiera la somme 1.

Valeur actuelle de cet engagement, escomptée à l'époque d'inventaire :

$${}_{n-r}E_{x+r}$$

La somme totale de tous les engagements futurs de l'assureur est donc, en valeur actuelle :

$$ {}_{n-r}E_{x+r} \cdot + {}_nP_x \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n-r} \left((r+\lambda) \cdot {}_{\lambda-1}|{}_1A_{x+r} \right) $$

Les *recettes futures* de l'assureur, escomptées à cette même époque d'inventaire, sont :

$$ {}_nP_x \cdot |_{n-r}a_{x+r} $$

La différence constitue la réserve mathématique cherchée :

$$ (1) \qquad {}_rV = {}_nP_x \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n-r} \left((r+\lambda) \cdot {}_{\lambda-1}|{}_1A_{x+r} \right) $$

$$ + {}_{n-r}E_{x+r} - {}_nP_x \cdot |_{n-r}a_{x+r} $$

Simplifions, après avoir introduit les symboles de commutation :

$$ {}_nP_x \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n-r} (r+\lambda) \cdot {}_{\lambda-1}|{}_1A_{x+r} = {}_nP_x \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n-r} (r+\lambda) \cdot \frac{M_{x+r+\lambda-1} - M_{x+r+\lambda}}{D_{x+r}} $$

$$ = \frac{{}_nP_x}{D_{x+r}} \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n-r} (r+\lambda) \cdot C_{x+r+\lambda-1} = \frac{{}_nP_x}{D_{x+r}} \cdot \Big\{ (r+1) \cdot C_{x+r} $$

$$ + (r+2) \cdot C_{x+r+1} + \ldots\ldots + [r + (n-r)] \cdot C_{x+n-1} \Big\} $$

$$ = \frac{{}_nP_x}{D_{x+r}} \cdot \Big\{ r \cdot [C_{x+r} + C_{x+r+1} + C_{x+r+2} + \ldots\ldots + C_{x+n-1}] $$

$$ + C_{x+r} + 2 \cdot C_{x+r+1} + 3 \cdot C_{x+r+2} + \ldots\ldots + (n-r) \cdot C_{x+n-1} \Big\} $$

$$= \frac{{}_nP_x}{D_{x+r}} \cdot \left\{ r \cdot (M_{x+r} - M_{x+n}) + R_{x+r} - R_{x+n} - (n-r) \cdot M_{x+n} \right\}$$

$$= \frac{{}_nP_x}{D_{x+r}} \cdot \left\{ r \cdot M_{x+r} - n \cdot M_{x+n} + R_{x+r} - R_{x+n} \right\}$$

D'autre part, on a dans le cas qui nous occupe ici :

$${}_nP_x = \frac{D_{x+n}}{N_x - R_x - (N_{x+n} - R_{x+n}) + n \cdot M_{x+n}}$$

On trouve cette prime annuelle par la méthode générale dont voici le résumé :

Recettes de l'assureur, ramenées, par l'escompte, à l'*époque de base,* c'est-à-dire à x années *avant* la conclusion des contrats (époque de la naissance des assurés) : ${}_nP_x \cdot (N_x - N_{x+n})$

Dépenses de l'assureur, ramenées par l'escompte à la même époque de base; ce sont :

1° les primes remboursées aux ayant-droit des assurés décédés, à savoir : pour la

1re année : ${}_nP_x \cdot d_x \cdot v^{x+1} = {}_nP_x \cdot C_x$

2ième » $2 \cdot {}_nP_x \cdot d_{x+1} \cdot v^{x+2} = 2 \cdot {}_nP_x \cdot C_{x+1}$

3ième » $3 \cdot {}_nP_x \cdot d_{x+2} \cdot v^{x+3} = 3 \cdot {}_nP_x \cdot C_{x+2}$

. . . . . .

. . . . . .

$n$ième année : $n \cdot {}_nP_x \cdot d_{x+n-1} \cdot v^{x+n} = n \cdot {}_nP_x \cdot C_{x+n-1}$

2° Les sommes payées aux assurés survivants : D_{x+n}

Somme des dépenses, escomptée à l'époque de base :

$${}_nP_x \cdot [C_x + 2 \cdot C_{x+1} + 3 \cdot C_{x+2} + \ldots + n \cdot C_{x+n-1}] + D_{x+n}$$

$$= {}_nP_x \cdot [R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}] + D_{x+n}$$

Nous pouvons donc, pour calculer ${}_nP_x$, poser l'équation générale suivante :

$${}_nP_x \cdot (N_x - N_{x+n}) = {}_nP_x \cdot [R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}] + D_{x+n}$$

d'où l'on tire :

$${}_nP_x \cdot [N_x - N_{x+n} - (R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n})] = D_{x+n}$$

d'où enfin :

$${}_nP_x = \frac{D_{x+n}}{N_x - R_x - (N_{x+n} - R_{x+n}) + n \cdot M_{x+n}}$$

Donc, l'expression ci-dessus donnant le produit

$${}_nP_x \cdot \sum_{\lambda} \left((r + \lambda) \cdot \lambda - 1 |_1 A_{x+r} \right)$$

devient :

$$\frac{D_{x+n}}{D_{x+r}} \cdot \frac{r \cdot M_{x+r} - n \cdot M_{x+n} + R_{x+r} - R_{x+n}}{N_x - R_x - (N_{x+n} - R_{x+n}) + n \cdot M_{x+n}}$$

De plus, on sait que :

$${}_{n-r}E_{x+r} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+r}} ;$$

enfin, ${}_nP_x \cdot |_{n-r}a_{x+r}$ devient :

$$= \frac{D_{x+n} (N_{x+r} - N_{x+n})}{(N_x - R_x - (N_{x+n} - R_{x+n}) + n \cdot M_{x+n}) \cdot D_{x+r}}$$

En remplaçant toutes ces expressions dans l'équation (1), nous obtenons pour la réserve mathématique cherchée :

$${}_rV = \frac{D_{x+n}}{D_{x+r}}$$

$$+ \frac{D_{x+n}}{D_{x+r}} \cdot \frac{r \cdot M_{x+r} - n \cdot M_{x+n} + R_{x+r} - R_{x+n}}{N_x - R_x - (N_{x+n} - R_{x+n}) + n \cdot M_{x+n}}$$

$$- \frac{D_{x+n}}{N_x - R_x - (N_{x+n} - R_{x+n}) + n \cdot M_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+r} - N_{x+n}}{D_{x+r}}$$

$$= \frac{D_{x+n}}{D_{x+r}} \cdot \frac{N_x - R_x - (N_{x+n} - R_{x+n}) + n \cdot M_{x+n} + r \cdot M_{x+r} - n \cdot M_{x+n} + R_{x+r} - R_{x+}}{N_x - R_x - (N_{x+n} - R_{x+n}) + n \cdot M_{x+n}}$$

$$- \frac{D_{x+n}}{N_x - R_x - (N_{x+n} - R_{x+n}) + n \cdot M_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+r} - N_{x+n}}{D_{x+r}}$$

$$= \frac{D_{x+n}}{D_{x+r}} \cdot \frac{N_x - R_x - N_{x+n} + r \cdot M_{x+r} + R_{x+r} - N_{x+r} + N_{x+n}}{N_x - R_x - (N_{x+n} - R_{x+n}) + n \cdot M_{x+n}}$$

Ainsi, la réserve mathématique devient finalement :

$${}_rV = \frac{D_{x+n}}{D_{x+r}} \cdot \frac{(N_x - N_{x+r}) - (R_x - R_{x+r}) + r \cdot M_{x+r}}{(N_x - N_{x+n}) - (R_x - R_{x+n}) + n \cdot M_{x+n}}$$

Méthode rétrospective.

Cette méthode consiste à établir la valeur actuelle des engagements de l'assuré et de l'assureur pour l'époque *précédant* le moment d'inventaire, depuis l'origine du contrat, et à faire la différence de ces engagements. Nous aurons alors :

Réserve mathématique =

$$\sum \left(\begin{array}{c} \text{Valeurs actuelles des engagements de l'assuré, depuis l'origine du contrat à l'époque d'inventaire.} \end{array} \right) - \sum \left(\begin{array}{c} \text{Valeurs actuelles des engagements de l'assureur, depuis l'origine du contrat à l'époque d'inventaire.} \end{array} \right)$$

Or, les engagements de l'assuré constituent des recettes pour l'assureur, tandis que les engagements de l'assureur sont ses

propres débours; la formule de définition ci-dessus peut donc aussi s'écrire comme suit :

$$\textit{Réserve mathématique} = \sum \left(\begin{array}{l} \text{Recettes antérieures de} \\ \text{l'assureur, en valeur ac-} \\ \text{tuelle escomptée à l'épo-} \\ \text{que d'inventaire.} \end{array} \right) - \sum \left(\begin{array}{l} \text{Dépenses antérieures de} \\ \text{l'assureur, en valeur ac-} \\ \text{tuelle escomptée à l'épo-} \\ \text{que d'inventaire.} \end{array} \right)$$

Premier exemple.

Assurance mixte simple; capital assuré : Fr. 100,—; âge à l'entrée : $x = 25$; durée du contrat : $n = 10$; prime annuelle constante temporaire, reposant sur la tête de l'assuré (x), payable au plus pendant 5 ans. Table de mortalité H^m, taux 4 % par an, avec capitalisation annuelle des intérêts.

Dans cet exemple, nous étudierons la variation de la réserve mathématique depuis le commencement du contrat jusqu'à son expiration, soit pendant dix ans, en comparant les recettes et les dépenses pour chaque année d'après la méthode rétrospective ; nous montrerons en même temps l'exactitude des calculs.

Nous supposons que 93 061 assurés, tous âgés de 25 ans, soumis à la même allure de mortalité, s'adressent au même instant au même assureur pour conclure des contrats identiques. Comme chaque assuré verse de suite Fr. 14,988, cela fait dès le début 93 061 . 14,988 = Fr. 1 394 891,33. Les variations ultérieures de ce fonds qui n'est autre que la réserve globale se voient par le tableau suivant, notamment les colonnes (4) et (11). A la fin des 10 années, il y a encore 86 281 survivants dont chacun doit recevoir le capital assuré de 100 francs ; il faut donc, à ce moment-là, une réserve de Fr. 8 628 100. Or, le calcul donne 8 628 290,83. La petite différence provient des décimales négligées.

Exemple de la méthode rétrospective.

Assurance mixte simple ; capital assuré 100 fr. ; âge $x = 25$; durée $n = 10$; prime annuelle constante temporaire pendant 5 ans. Table de mortalité H^m ; taux de 4 % l'an.

$$\text{Prime annuelle} = 100 \,.\, {}_5P(A_{25}\,;\,\overline{10|}) = 100 \,.\, \frac{M_{25} - M_{35} + D_{35}}{N_{25} - N_{30}} = 14{,}988.$$

Année k (1)	Age x (2)	l_x (3)	Fonds de réserve au *commencement* de l'année (Réserve math. globale) (4)	Primes payées au *commencement* de l'année $l_x \,.\, 100 \,.\, {}_5P_{\overline{x\,n|}}$ = (3) . 14,988 (5)	Somme (4) + (5) (6)	Intérêts produits pendant l'année (6) . 0,04 (7)	Somme (6) + (7) (8)	Décès pendant l'année d_x (9)	Dépenses à payer en fin d'année $100\,d_x$ (10)	Fonds de réserve *à la fin* de l'année (Réserve mathém. *globale* en fin d'année) (11)	Survivants à la fin de l'année l_{x+1} = (3) − (9) (12)	Réserve mathématique individuelle ${}_kV_{\overline{x\,n|}}$ = (11) : (12) (13)
1	25	93 061	.....	1 394 891,33	1 394 891,33	55 795,85	1 450 692,18	617	61 700	1 388 992,18	92 444	15,03
2	26	92 444	1 388 992,18	1 385 643,12	2 774 637,30	110 985,49	2 885 622,79	618	61 800	2 823 822,79	91 826	30,75
3	27	91 826	2 823 822,79	1 376 379,91	4 200 202,70	168 008,11	4 368 210,81	634	63 400	4 304 810,81	91 192	47,21
4	28	91 192	4 304 810,81	1 366 876,89	5 671 687,70	226 867,51	5 898 555,21	654	65 400	5 833 155,21	90 538	64,43
5	29	90 538	5 833 155,21	1 357 074,08	7 190 229,29	287 609 17	7 477 838,46	673	67 300	7 410 538,46	89 865	82,46
6	30	89 865	7 410 538,46	0	7 410 538,46	296 421,54	7 706 960,00	694	69 400	7 637 560,00	89 171	85,65
7	31	89 171	7 637 560,00	0	7 637 560,00	305 502,40	7 943 062,40	706	70 600	7 872 462,40	88 465	88,99
8	32	88 465	7 872 462,40	0	7 872 462,40	314 898,50	8 187 360,90	717	71 700	8 115 660,90	87 748	93,26
9	33	87 748	8 115 660,90	0	8 115 660,90	324 626,44	8 440 287,34	727	72 700	8 367 587,34	87 021	96,15
10	34	87 021	8 367 587,34	0	8 367 587,34	334 703,49	8 702 290,83	740	74 000	8 628 290,83	86 281	100,0022

Second exemple.

Supposons une assurance mixte simple du montant de 1, souscrite sur une tête d'âge x, pour une durée de n années, et calculons sa réserve à la fin de la $r^{ième}$ année. La prime annuelle constante est donnée par la formule :

$$P_{x;\overline{n}|} = {}_nP(A_{x;\overline{n}|}) = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Supposons l_x personnes, toutes du même âge x, concluant au même moment avec le même assureur des contrats identiques.

Les recettes jusqu'à l'époque d'inventaire, escomptées pour ce moment-là, sont :

$$P_{x;\overline{n}|} \cdot l_x \cdot (1+i)^r + P_{x;\overline{n}|} \cdot l_{x+1} \cdot (1+i)^{r-1} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + P_{x;\overline{n}|} \cdot l_{x+r-1} \cdot (1+i).$$

Les dépenses jusqu'à la même époque d'inventaire et escomptées pour ce moment-là, sont :

$$d_x \cdot (1+i)^{r-1} + d_{x+1} \cdot (1+i)^{r-2} + \ldots\ldots + d_{x+r-1} \cdot 1$$

La réserve mathématique globale est égale à la différence des deux expressions précédentes :

$$P_{x;\overline{n}|} \cdot \left\{ l_x \cdot (1+i)^r + l_{x+1} \cdot (1+i)^{r+1} + \ldots\ldots + l_{x+r-1} \cdot (1+i) \right\}$$

$$- \left\{ d_x \cdot (1+i)^{r-1} + d_{x+1} \cdot (1+i)^{r-2} + \ldots\ldots + d_{x+r-1} \right\}$$

La réserve individuelle à l'époque d'inventaire s'obtient en divisant la réserve globale ci-dessus par le nombre l_{x+r} des survivants ; on trouve :

$$\frac{P_{x\,\overline{n}|}}{l_{x+r}} \cdot \left\{ l_x \cdot (1+i)^r + l_{x+1} \cdot (1+i)^{r-1} + \ldots\ldots + l_{x+r-1} \cdot (1+i) \right\}$$

$$- \frac{1}{l_{x+r}} \cdot \left\{ d_x \cdot (1+i)^{r-1} + d_{x+1} \cdot (1+i)^{r-2} + \ldots\ldots + d_{x+r-1} \right\}$$

Multiplions haut et bas par $v^{x+r} = (1+i)^{-x-r}$; il vient :

$$\frac{P_{x;\overline{n}|}}{D_{x+r}} \cdot \left\{ D_x + D_{x+1} + \ldots\ldots + D_{x+r-1} \right\}$$

$$- \frac{1}{D_{x+r}} \cdot \left\{ C_x + C_{x+1} + \ldots\ldots + C_{x+r-1} \right\}$$

$$= \frac{P_{x;\overline{n}|}}{D_{x+r}} \cdot \left\{ N_x - N_{x+r} \right\} - \frac{1}{D_{x+r}} \cdot \left\{ M_x - M_{x+r} \right\}$$

c'est-à-dire qu'on trouve pour la réserve mathématique individuelle l'expression suivante :

$${}_rV \left[{}_nP_x \, (A_{x;\overline{n}|}) \right] = \frac{N_x - N_{x+r}}{D_{x+r}} \cdot P_{x;\overline{n}|} - \frac{M_x - M_{x+r}}{D_{x+r}}$$

Méthode par comparaison.

Elle consiste à calculer la réserve du contrat en question en le comparant à un contrat analogue, mais relatif à une autre combinaison, à savoir : à une combinaison *pour laquelle on a déjà*

établi un barème entier de la réserve mathématique ${}_rV$, pour toutes les valeurs de r et de l'âge d'entrée x.

Comme l'assurance « vie entière » est l'une des combinaisons les plus utilisées, beaucoup de compagnies ont dressé des tableaux entiers et complets de ${}_rV_x$, tableaux où l'on peut lire directement la réserve mathématique individuelle d'une assurance simple en cas de décès, au capital de montant 1, pour toutes les valeurs entières de r et de x. Il est naturel de chercher à profiter de ces calculs déjà tout faits pour déterminer la réserve mathématique d'autres contrats, rentrant dans des combinaisons pour lesquelles il n'existe pas de barèmes analogues.

En spécialisant, nous pouvons donc dire ceci : *La méthode par comparaison consiste à déterminer la réserve mathématique du contrat considéré en la comparant à celle de l'assurance* « vie entière ». Nous n'avons pas trouvé cette méthode explicitement mentionnée dans la littérature d'assurance. Nous l'appliquerons à deux exemples, savoir l'assurance mixte simple et l'assurance temporaire en cas de décès.

Premier exemple.

Une assurance mixte simple, du montant de 1, a été souscrite sur une tête d'âge x, pour une durée de n années, moyennant paiement de primes annuelles constantes ${}_nP_{x;\overline{n}|}$ reposant sur la tête de l'assuré (x), exigibles au plus n fois. Quelle est, au bout de r années, droit avant le paiement de la $(r+1)^{\text{ième}}$ prime, la réserve mathématique de ce contrat?

C'est l'exemple que nous venons de traiter et pour lequel nous avons trouvé comme expression de la réserve mathématique :

$$ {}_rV\left[{}_nP_x\,(A_{x;\overline{n}|})\right] = \frac{N_x - N_{x+r}}{D_{x+r}} \cdot P_{x;\overline{n}|} - \frac{M_x - M_{x+r}}{D_{x+r}} $$

Dans le but d'introduire la réserve ${}_rV_x$ de l'assurance « vie entière », nous allons transformer cette expression ainsi qu'il suit :

$$ {}_rV = P_{x;\overline{n}|} \cdot \frac{N_x}{D_{x+r}} - P_{x;\overline{n}|} \cdot \frac{N_{x+r}}{D_{x+r}} - \frac{M_x}{D_{x+r}} + \frac{M_{x+r}}{D_{x+r}} $$

Or, on sait que

$$ \frac{M_{x+r}}{D_{x+r}} = A_{x+r} \; ; \; \frac{N_{x+r}}{D_{x+r}} = a_{x+r} $$

Il s'en suit pour la réserve cherchée :

$$ (2) \qquad {}_rV\,[{}_nP_x\,(A_{x;\overline{n}|})] = A_{x+r} - a_{x+r} \cdot P_{x;\overline{n}|} + \frac{N_x \cdot P_{x;\overline{n}|}}{D_{x+r}} - \frac{M_x}{D_{x+r}} $$

Comparons maintenant la prime ${}_nP_{x;\overline{n}|}$ de l'assurance mixte simple avec la prime annuelle constante P_x de l'assurance dite « vie entière », et indiquons leur différence par $h_{x;n}$, c'est-à-dire posons :

$$ {}_nP_x\,(A_{x;\overline{n}|}) = P_x + h_{x;\overline{n}|} $$

(Cette différence dépend non seulement de l'âge d'entrée x, mais aussi de la durée n du contrat.)

En remplaçant $P_{x;\overline{n}|}$ par $P_x + h_{x;n|}$ dans l'équation (2), nous aurons :

$$ {}_rV\,[{}_nP_x(A_{x;\overline{n}|})] = A_{x+r} - a_{x+r} \cdot (P_x + h_{x;\overline{n}|}) + \frac{N_x}{D_{x+r}} \cdot (P_x + h_{x;\overline{n}|}) - \frac{M_x}{D_{x+r}} $$

$$ = A_{x+r} - P_x \cdot a_{x+r} $$

$$- h_{x;\overline{n}|} \cdot a_{x+r} + \frac{N_x}{D_{x+r}} \cdot P_x + h_{x;\overline{n}|} \cdot \frac{N_x}{D_{x+r}} - \frac{M_x}{D_{x+r}}$$

Or, $a_{x+r} = \frac{N_{x+r}}{D_{x+r}}$, de sorte que le second membre de notre équation devient :

$$= A_{x+r} - P_x \cdot a_{x+r} + \frac{N_x - N_{x+r}}{D_{x+r}} \cdot h_{x;\overline{n}|} + \frac{N_x \cdot P_x - M_x}{D_{x+r}}$$

Ce dernier terme est nul, parce que $P_x = P_x(A_x) = \frac{M_x}{N_x}$

La réserve cherchée s'exprime donc ainsi :

$${}_rV\,[{}_nP_x\ (A_{x;\overline{n}|})] = A_{x+r} - P_x \cdot a_{x+r} + \frac{N_x - N_{x+r}}{D_{x+r}} \cdot h_{x;\overline{n}|}$$

Or, on sait que la réserve mathématique de l'assurance « vie entière » est :

$${}_rV\,(A_x) = A_{x+r} - P_x \cdot a_{x+r}$$

On sait, de plus, que :

$$\frac{N_x - N_{x+r}}{D_{x+r}} = \frac{N_x - N_{x+r}}{D_x} \cdot \frac{D_x}{D_{x+r}} = {}_{|r}a_x \cdot \frac{1}{{}_rE_x}$$

Nous trouvons donc :

$$(3) \qquad {}_rV\,[{}_nP_x\ (A_{x;\overline{n}|})] = {}_rV\,(A_x) + \frac{{}_{|r}a_x}{{}_rE_x} \cdot h_{x;\overline{n}|}$$

On peut donner à ce résultat une autre forme dont nous nous servirons plus tard.

Reprenons l'égalité (2) :

$${}_rV\,[{}_nP_x(A_{x;\overline{n}|}) = A_{x+r} - a_{x+r} \cdot P_{x;\overline{n}|} + \frac{N_x \cdot P_{x;\overline{n}|} - M_x}{D_{x+r}}$$

Remplaçons dans le dernier terme $P_{x;\overline{n}|}$ par $P_x + h_{x;\overline{n}|}$:

$$_rV[_nP_x(A_{x;\overline{n}|})] = A_{x+r} - a_{x+r} \cdot P_{x;\overline{n}|} + \frac{N_x \cdot (P_x + h_{x;\overline{n}|}) - M_x}{D_{x+r}}$$

Effectuons les opérations indiquées :

$$_rV[_nP_x(A_{x;\overline{n}|})] = A_{x+r} - a_{x+r} \cdot P_{x;\overline{n}|} + \frac{N_x \cdot P_x - M_x}{D_{x+r}} + \frac{N_x \cdot h_{x;\overline{n}|}}{D_{x+r}}$$

Le 3ième terme est nul, comme nous venons de le montrer; il vient donc :

$$_rV\,[_nP_x\,(A_{x;\overline{n}|})] = A_{x+r} - a_{x+r} \cdot P_{x;\overline{n}|} + \frac{N_x}{D_{x+r}} \cdot h_{x;\overline{n}|}$$

En divisant le numérateur et le dénominateur du 3ième terme par D_x, nous obtenons :

$$_rV\,[_nP_x\,(A_{x;\overline{n}|})] = A_{x+r} - a_{x+r} \cdot P_{x;\overline{n}|} + \frac{a_x}{{}_rE_x} \cdot h_{x;\overline{n}|}$$

Ce résultat est des plus importants pour calculer la réserve mathématique des polices en groupes.

Nous pouvons utiliser la formule (3) pour calculer la réserve mathématique de contrats de nature diverse, par exemple pour l'assurance temporaire au décès.

Deuxième exemple.

Calculons la réserve mathématique, après k années, d'une assurance simple en cas de décès, temporaire pendant n années, achetée au moyen de primes annuelles constantes reposant sur la tête de l'assuré (x), exigibles n fois au plus.

Nous obtiendrons le même résultat que précédemment, avec cette seule différence que, dans ce cas, $h_{x;\overline{n}|}$ est négatif.

Nous calculerons d'abord la réserve mathématique par la méthode rétrospective, en supposant une société de l_x personnes, toutes du même âge x, et concluant au même instant avec le même assureur des contrats identiques. En se plaçant au point de vue de l'assureur, on peut écrire :

Recettes jusqu'à l'époque d'inventaire, en valeur actuelle :

$$ {}_nP_x(|_nA_x) \cdot \left\{ l_x \cdot (1+i)^k + l_{x+1} \cdot (1+i)^{k-1} + \ldots + l_{x+k-1} \cdot (1+i) \right\} $$

$$ = {}_nP \cdot \sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} l_{x+\lambda} \cdot (1+i)^{k-\lambda}, $$

où ${}_nP$ est ici une abréviation pour ${}_nP_x(|_nA_x)$

Dépenses jusqu'à la même époque, en valeur actuelle :

$$ d_x \cdot (1+i)^{k-1} + d_{x+1} \cdot (1+i)^{k-2} + \ldots\ldots + d_{x+k-1} \cdot 1 $$

$$ = \sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} d_{x+\lambda} \cdot (1+i)^{k-\lambda-1} $$

La réserve mathématique globale est la différence de ces deux expressions :

$$ {}_nP_x(|_nA_x) \cdot \sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} l_{x+\lambda} \cdot (1+i)^{k-\lambda} - \sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} d_{x+\lambda} \cdot (1+i)^{k-1-\lambda} $$

La réserve mathématique individuelle s'obtient en divisant cette réserve globale par le nombre l_{x+k} des survivants :

$$ {}_kV\left[{}_nP_x(|_nA_x) \right] = \frac{{}_nP \cdot \sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} l_{x+\lambda} \cdot (1+i)^{k-\lambda}}{l_{x+k}} - \frac{\sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} d_{x+\lambda} \cdot (1+i)^{k-1-\lambda}}{l_{x+k}}, $$

expression qu'on peut écrire, en amplifiant haut et bas par v^{x+k} :

$$ {}_kV\left[{}_nP_x(|_nA_x)\right] = \frac{\sum_{\lambda}^{0\ldots k-1} D_{x+\lambda}}{D_{x+k}} \cdot {}_nP - \frac{\sum_{\lambda}^{0\ldots k-1} C_{x+\lambda}}{D_{x+k}} $$

$$ = \frac{N_x - N_{x+k}}{D_{x+k}} \cdot {}_nP_x(|_nA_x) - \frac{M_x - M_{x+k}}{D_{x+k}} $$

La réserve mathématique cherchée, calculée rétrospectivement, est donc :

$$ (4) \qquad {}_kV\left[{}_nP_x(|_nA_x)\right] = \frac{N_x - N_{x+k}}{D_{x+k}} \cdot {}_nP - \frac{M_x - M_{x+k}}{D_{x+k}} $$

Si nous comparons les primes annuelles ${}_nP_x(|_nA_x)$ pour l'assurance en question aux primes correspondantes pour l'assurance « vie entière », nous constatons que les premières sont inférieures aux secondes, c'est-à-dire qu'on peut poser :

$$ {}_nP_x(|_nA_x) = P_x - h^1{}_{x;\overline{n}|} $$

Remplaçons dans l'équation (4) ; nous obtenons :

$$ {}_kV\left[{}_nP_x(|_nA_x)\right] = \frac{N_x - N_{x+k}}{D_{x+k}} \cdot \left(P_x - h^1{}_{x;\overline{n}|}\right) - \frac{M_x - M_{x+k}}{D_{x+k}} $$

$$ = \frac{N_x}{D_{x+k}} \cdot P_x - \underbrace{\frac{N_{x+k}}{D_{x+k}}}_{a_{x+k}} \cdot P_x - h^1{}_{x;\overline{n}|} \cdot \frac{N_x}{D_{x+k}} + h^1{}_{x;\overline{n}|} \cdot \frac{N_{x+k}}{D_{x+k}} - \frac{M_x}{D_{x+k}} + \underbrace{\frac{M_{x+k}}{D_{x+k}}}_{A_{x+k}} $$

$$ = A_{x+k} - a_{x+k} \cdot P_x - h^1{}_{x;\overline{n}|} \cdot \frac{N_x - N_{x+k}}{D_{x+k}} + \frac{N_x \cdot P_x - M_x}{D_{x+k}} $$

Le dernier terme est nul, puisque $P_x = \frac{M_x}{N_x}$; d'où :

$$ {}_kV\left[{}_nP_x({}_{|n}A_x)\right] = A_{x+k} - a_{x+k} \cdot P_x - h^1_{x;\overline{n}|} \cdot \frac{N_x - N_{x+k}}{D_{x+k}} $$

Or : $$ A_{x+k} - a_{x+k} \cdot P_x = {}_kV_x $$

$$ \frac{N_x - N_{x+k}}{D_{x+k}} = \frac{N_x - N_{x+k}}{D_x} \cdot \frac{D_x}{D_{x+k}} = \frac{{}_{|k}a_x}{{}_kE_x} $$

Substituons ces deux expressions dans l'équation ci-dessus ; il vient :

$$ {}_kV\left[{}_nP_x({}_{|n}A_x)\right] = {}_kV_x - h^1_{x;\overline{n}|} \cdot \frac{{}_{|k}a_x}{{}_kE_x} $$

Les seules différences entre cette formule et la formule correspondante pour l'assurance mixte [voir équation (3)] consistent en un changement de signe au deuxième terme et une autre valeur de h.

Dans les deux cas, les valeurs de h et de h^1 dépendent *de l'âge d'entrée* de l'assuré et *de la durée* du contrat.

Cette dernière formule qui est, en principe, la même que l'équation (3), a aussi son importance pour le groupement des polices d'assurance.

Le calcul de ces différentes assurances se fait facilement, une fois qu'on a calculé des barèmes se rapportant :

1° A la réserve mathématique pour chaque âge, relative à l'assurance simple en cas de décès dite assurance « vie entière » ;

2° A la différence entre : les primes annuelles « vie entière » et les primes annuelles de l'assurance mixte ; ou bien à la différence entre : les primes annuelles « vie entière » et celles de l'assurance temporaire au décès ;

3° Aux valeurs successives de l'expression

$$\frac{N_x - N_{x+r}}{D_{x+r}}$$

pour des valeurs de r allant de 1 jusqu'à l'âge limite ω de la table de mortalité. On sait que pour la table H^m, cet âge limite est $\omega = 96$; pour la table R. F., $\omega = 106$.

Méthode par récurrence.

Cette méthode donne une relation entre deux réserves anniversaires successives du même contrat.

Désignons par ${}_rV$ la réserve de fin d'exercice, à l'instant qui précède le paiement d'une prime annuelle, d'un contrat souscrit sur une tête d'âge x et qui a déjà r années de durée ; et soit P la prime annuelle pure du contrat, le capital qui doit être payé en cas de décès de l'assuré étant 1.

La réserve ${}_rV$ augmentée de la prime P qui va être acquittée servira :

1° à payer le capital 1 en cas de décès de l'assuré pendant la $(r+1)^{ième}$ année du contrat, et

2° à constituer la réserve ${}_{r+1}V$ en fin d'exercice, en cas de vie du titulaire de la police à cette époque.

Or, la valeur actuelle, à l'époque d'inventaire, du premier engagement de l'assureur, est ${}_1|A_{x+r}$

et la valeur actuelle, à la même époque, du second engagement est égale à la prime unique pour un capital différé d'une année en cas de vie et de montant égal à ${}_{r+1}V$, soit ${}_{r+1}V \cdot {}_1E_{x+r}$

On obtient donc la relation : ${}_rV + P = |_1A_{x+r} + {}_1E_{x+r} \cdot {}_{r+1}V$ ou

$$(5) \qquad {}_{r+1}V = \frac{{}_rV + P - |_1A_{x+r}}{{}_1E_{x+r}}$$

On voit que dans cette formule n'intervient pas le temps restant à courir pour les polices de durée limitée. La nature de l'assurance intervient par la prime annuelle P et par le montant du capital à payer en cas de décès pendant l'exercice. Les seuls éléments sont P, ${}_1A_{x+r}$ et ${}_1E_{x+r}$ pour chaque âge ; ils se calculent bien facilement. Sachant qu'on a toujours ${}_0V = 0$, on peut déterminer de proche en proche : ${}_1V$, ${}_2V$, ${}_3V$, etc.

La formule que nous venons d'établir reste valable pour toutes les formes de l'assurance au décès, à condition d'y remplacer P par la prime annuelle correspondant aux différentes combinaisons, et ${}_rV$ par la réserve correspondante également.

S'il s'agit d'un capital différé, ou d'une rente viagère différée, le capital payable en cas de décès est nul pendant la durée du différé, et la relation (5) correspondante devient pour le temps du différé, si la prime est annuelle,

$${}_{r+1}V = \frac{{}_rV + |_nP}{{}_1E_{x+r}}$$

ou, encore plus simplement,

$${}_{r+1}V = \frac{{}_rV}{{}_1E_{x+r}}$$

si le contrat fut conclu à prime unique.

Enfin, s'il s'agit d'une rente viagère en cours de jouissance et si l'on suppose la rente annuelle de montant 1, payable immédiatement avant l'inventaire, on aura la relation :

$${}_rV = {}_1E_{x+r} + {}_1E_{x+r} \cdot {}_{r+1}V$$

d'où

$${}_{r+1}V = \frac{{}_rV}{{}_1E_{x+r}} - 1$$

Méthode par la différence des primes annuelles.

Cette méthode n'est applicable que dans le cas des assurances à primes échelonnées, et seulement si l'époque d'inventaire tombe dans la période où les primes courent encore.

I^er^ cas. Assurance vie entière.

Supposons que l'assurance soit contractée par primes annuelles constantes ; soit P_x leur montant.

Nous nous proposons de calculer la réserve mathématique au bout de k années; elle est représentée par le symbole :

$$_kV[P_x\,(A_x)] = {}_kV_x$$

Si l'assuré avait signé le contrat en question à l'âge $x+k$, il aurait à payer annuellement: P_{x+k}.

On a évidemment:

$$P_{x+k} > P_x$$

En s'assurant à l'âge x, on épargne donc annuellement :

$$P_{x+k} - P_x$$

et cela aussi longtemps que l'on doit payer des primes; on épargne donc, en valeur actuelle :

$$\left(P_{x+k} - P_x\right) \cdot a_{x+k}$$

Cette expression représente ce que l'assureur doit avoir en réserve pour parfaire à ses obligations ; c'est donc la réserve mathématique du dit contrat, k années après sa conclusion.

Nous avons donc :

$$_kV[P_x(A_x)] = {}_kV_x = (P_{x+k} - P_x) \cdot a_{x+k}$$

Vérification : En remplaçant dans cette égalité

$$P_{x+k} = \frac{M_{x+k}}{N_{x+k}};\ P_x = \frac{M_x}{N_k} \quad \text{et} \quad a_{x+k} = \frac{N_{x+k}}{D_{x+k}}$$

nous la transformerons en

$${}_kV_x = \left(\frac{M_{x+k}}{N_{x+k}} - \frac{M_x}{N_x}\right) \cdot \frac{N_{x+k}}{D_{x+k}} = \frac{M_{x+k}}{D_{x+k}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+k}}{D_{x+k}}$$

Nous trouvons ainsi le même résultat que par les méthodes précédentes.

*II*ième *cas. Assurance simple en cas de décès, avec paiement temporaire de primes.*

Supposons que les primes annuelles constantes, reposant sur la tête de l'assuré (x), soient payables pendant t années au plus. Proposons-nous de calculer la réserve au bout de k années, soit :

$$_kV[{}_tP_x(A_x)] = {}_kV({}_tP_x, \text{ où } k < t$$

A l'âge d'entrée x, la prime annuelle de la dite assurance se monte à ${}_tP_x$.

Si l'assuré concluait le même contrat à l'âge d'entrée $x + k$, la prime annuelle de la dite assurance se monterait à ${}_{t-k}P_{x+k}$.

L'épargne réalisée, dont la valeur actuelle représente la réserve mathématique, est donc :

$$_kV({}_tP_x) = \left({}_{t-k}P_{x+k} - {}_tP_x\right) \cdot |_{t-k}a_{x+k}$$

La généralisation à d'autres combinaisons d'assurance est immédiate et l'on peut énoncer la règle suivante :

La réserve mathématique, au bout de k années, d'une assurance conclue à primes échelonnées constantes, par un sujet d'âge x, est égale à la valeur actuelle d'une rente viagère constante payable au commencement de chaque année, aussi longtemps que les primes sont encore dues par l'assuré, et reposant sur une tête d'âge $x+k$, rente viagère dont le montant est la différence des primes annuelles constantes que devraient payer, pour la même assurance, deux sujets actuellement d'âge x et d'âge $x + k$ respectivement.

Application.

Quelle est la réserve mathématique, après k années, d'une rente viagère différée de n années, achetée par primes annuelles constantes et temporaires pendant n années reposant sur une tête actuellement d'âge x ?

On suppose que $k < n$

La règle ci-dessus énoncée nous permet d'écrire sans autre l'expression suivante pour la réserve cherchée :

$$ {}_kV\left[{}_nP_x\,(n|a_x)\right] = \left\{ {}_{n-k}P_{x+k}\,(n-k|a_{x+k}) - {}_nP_x\,(n|a_x) \right. \cdot \left\{ {}_{n-k}a_{x+k} $$

Réserve de Zillmer.

L'idée primitive de cette méthode est due à l'actuaire anglais *Sprague*. Elle fut développée par *Zillmer* et mise en pratique surtout par les compagnies d'assurance en Allemagne.

Ce système dit « *de Zillmer* » a pour but de couvrir les dépenses qui se produisent lors de la conclusion des contrats. A ce moment, la société fait des dépenses extraordinaires dites « frais d'acquisition » ; ce sont surtout les commissions payées aux agents; puis aussi : les frais de visites médicales, etc. Quand le nombre des nouveaux assurés est considérable, ces dépenses absorbent une grande partie de l'actif de la société. *Zillmer* s'est posé le problème: De quelle quantité faut-il augmenter les primes nettes pour couvrir ces frais d'acquisition dans un temps déterminé ?

Le calcul de ce que doit être cette majoration, pour couvrir les dépenses faites au moment de la conclusion des contrats, n'offre pas de difficultés. Désignons les dépenses faites par s, et soit α le surplus annuel que l'assuré devra payer, avec la prime échelonnée, pour couvrir les dépenses s. Si la prime échelonnée est payable pendant la vie entière de l'assuré, au commencement de chaque année, on aura :

$$s = \alpha \, . \, a_x$$

Si la prime nette est temporaire pendant n années, on aura :

$$s = \alpha \, . \, {}_{|n}a_x$$

De ces formules, nous pouvons tirer α :

$$\alpha = \frac{s}{a_x}, \text{ ou } \alpha = \frac{s}{{}_{|n}a_x}$$

Or, la réserve mathématique calculée d'après la « méthode de *Zillmer* » est égale à la réserve ordinaire dont serait soustraite la valeur actuelle des dépenses non amorties s. Si nous indiquons la réserve calculée d'après la «méthode de *Zillmer*» par ${}^{z}V$, dans l'assurance en cas de décès dite « assurance vie entière », nous obtenons :

$${}^{z}_{n}V_x = {}_{n}V_x - \alpha \, . \, a_{x+n}$$

De même, avec paiement de primes temporaires pendant m années:

$$\overset{z}{}_{n}V(_{m}P_{x}) = {}_{n}V\,(_{m}P_{x}) - \alpha \,.\, |_{m-n}\,a_{x+n}$$

où n est supposé moindre que m.

En dernier lieu, nous obtiendrons les formules suivantes pour ces deux cas.

I^er cas: les primes sont payables pendant la vie entière de l'assuré;

$$\overset{z}{}_{n}V_{x} = A_{x+n} - (P_{x}+\alpha)\,.\,a_{x+n} = A_{x+n} - \left(P_{x} + \frac{s}{a_{x}}\right).\,a_{x+n}$$

II^ième cas: les primes sont temporaires pendant m années;

$$\overset{z}{}_{n}V_{m}(P_{x}) = A_{x+n} - (_{m}P_{x} + \alpha)\,.\,|_{m-n}\,a_{x+n}$$

$$= A_{x+n} - \left(_{m}P_{x} + \frac{s}{|_{m}a_{x}}\right).\,|_{m-n}\,a_{x+n},\ \text{si}\ m > n.$$

Le tableau ci-dessous montre la différence de la réserve mathématique, calculée d'après la «méthode de *Zillmer*» et d'après la méthode ordinaire, d'une assurance de fr. 1000,— en cas de décès, reposant sur une tête de dix ans et pour le cas où les dépenses pour frais d'acquisition se montent à 1,5 % du capital assuré, c'est-à-dire : s = Fr. 15,—.

n	Primes payées pendant							
	la vie entière		10 ans		20 ans		30 ans	
	${}_{n}V$	$\overset{z}{}_{n}V$	${}_{n}V(_{10}P_{x})$	$\overset{z}{}_{n}V(_{10}P_{x})$	${}_{n}V(_{20}P_{x})$	$\overset{z}{}_{n}V(_{20}P_{x})$	${}_{n}V(_{30}P_{x})$	$\overset{z}{}_{n}V(_{30}P_{x})$
5	59,39	45,28	199,78	191,48	102,73	90,42	74,01	60,51
10	126,46	113,35	443,42	443,42	224,32	215,27	159,50	147,77
20	282,69	271,92	542,59	542,59	542,59	542,59	370,55	363,44

A proprement parler, la « méthode de *Zillmer* » n'est donc pas une méthode nouvelle pour calculer la réserve mathématique ; c'est plutôt l'application de la méthode prospective au cas où l'on opère avec des *primes chargées* au lieu de primes nettes ou mathématiques. La définition même de la méthode prospective montre que, dans ce cas, la réserve mathématique est nécessairement moindre que la réserve obtenue en faisant intervenir les *primes nettes* dans les calculs. Ce fait est du reste confirmé par les formules ci-dessus, et par les exemples particuliers résumés dans le tableau.

III. GROUPEMENT DES POLICES

Les calculs des réserves sont, ainsi que l'on peut s'en rendre compte, assez complexes, et, lorsqu'il s'agit d'inventorier un grand nombre de contrats, le travail devient considérable. Pour simplifier ce calcul, on peut diviser les polices d'assurance en groupes, d'après les combinaisons ou « tarifs » auxquels elles se rapportent, et réunir dans chacun de ces groupes les assurés d'après leur âge à l'époque d'inventaire sans tenir compte de la date à laquelle ils ont conclu leur contrat.

Les calculs peuvent alors s'effectuer d'après les méthodes suivantes :

Première méthode.

Comme exemple, envisageons la combinaison dite vie entière.

Supposons B personnes, du même âge $z = x + k$ à l'époque d'inventaire, assurées aux différentes époques suivantes et réunies par groupes suivant « leur âge à l'entrée », c'est-à-dire l'âge qu'elles avaient en signant le contrat d'assurance.

1er groupe. Moment de la signature du contrat : l'époque de base, soit : 1er janvier 1850. Nombre des personnes de ce groupe : b.

Age à l'entrée : x_0. Total des capitaux assurés par ces b personnes : c_0. Prime annuelle correspondant à l'unité du capital : P_x. Temps écoulé depuis la signature du contrat jusqu'à l'époque d'inventaire : k_0 années.

Réserve mathématique provenant de ce premier groupe :

$$c_0 \cdot {}_{k_0}V_x = c_0 \cdot A_{x+k} - c_0 \cdot a_{x+k} \cdot P_x$$

IIième groupe. Les éléments analogues relatifs à ce groupe sont les suivants :

moment de la signature des contrats d'assurance : 1er janvier 1851 ;
nombre des personnes de ce groupe : b_1 ;
âge à l'entrée : $x_1 = x + 1$;
total des capitaux assurés dans ce groupe : c_1 ;
prime annuelle correspondant à l'unité du capital assuré : P_{x+1} ;
nombre d'années écoulées depuis la signature des contrats jusqu'à l'époque d'inventaire : $k_1 = k - 1$

Réserve mathématique provenant de ce deuxième groupe :

$$c_1 \cdot {}_{k-1}V_{x+1} = c_1 \cdot A_{x+k} - c_1 \cdot a_{x+k} \cdot P_{x+1}$$

IIIième groupe. Les éléments analogues relatifs à ce groupe sont les suivants :

1er janvier 1852 ; b_2 ; $x_2 = x + 2$; c_2 ; P_{x+2} ; $k_2 = k - 2$

Réserve mathématique provenant de ce troisième groupe :

$$c_2 \cdot {}_{k-2}V_{x+2} = c_2 \cdot A_{x+k} - c_2 \cdot a_{x+k} \cdot P_{x+2}$$

. . . . . .

. . . . . .

$k^{ième}$ *groupe.* Les éléments analogues relatifs à ce groupe sont les suivants :

1^{er} janvier $(1850 + k - 1)$; b_{k-1} ; $x_{k-1} = x + k - 1$; c_{k-1} ;

P_{x+k-1} temps écoulé depuis la signature de ces contrats jusqu'à l'époque d'inventaire : $k_{k-1} = 1$ année.

Réserve mathématique provenant de ce $k^{ième}$ groupe.

$$c_{k-1} \cdot {}_1V_{x+k-1} = c_{k-1} \cdot {}_1A_{x+k} - c_{k-1} \cdot a_{x+k} \cdot P_{x+k-1}$$

En additionnant toutes ces réserves mathématiques, on obtient :

la réserve mathématique totale =

$$A_{x+k} \cdot \sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} c_\lambda - a_{x+k} \cdot \sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} c_\lambda \cdot P_{x+\lambda}$$

Remarquons d'abord que

$\sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} c_\lambda = K$ n'est autre chose que la somme de tous les capitaux assurés; ensuite, que

$\sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} c_\lambda \cdot P_{x+\lambda} =$ Somme totale de toutes les primes annuelles payées.

Appelons z à l'âge de l'inventaire, de sorte que

$$z = x_0 + k_0 = x_1 + k_1 = x_2 + k_2 = \ldots\ldots$$

La formule ci-dessus devient :

$$\textit{Réserve totale} = A_z \cdot K - a_z \cdot \sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} c_\lambda \cdot P_{x+\lambda}$$

Nous pouvons donc énoncer la règle suivante :

Pour déterminer la réserve mathématique totale, il faut :

1° grouper en une même catégorie tous les assurés ayant *à l'époque d'inventaire* le même âge $z = x + k$ et ayant souscrit la même combinaison ;

2° multiplier la somme des capitaux assurés, K, par la prime unique correspondant à une assurance vie entière reposant sur une tête d'âge z ;

3° multiplier la somme des primes annuelles versées par tous les assurés, par la prime unique correspondant à une rente viagère reposant sur une tête d'âge z ;

4° soustraire le second produit du premier. Le résultat sera la réserve mathématique totale correspondant au groupe d'assurés considéré.

Deuxième méthode.

Nous groupons les polices, comme précédemment, d'après l'âge à l'époque d'inventaire, et suivant les combinaisons.

Premier exemple. Assurance vie entière.

Nous répartissons de nouveau les assurés en groupes, comme dans la première méthode exposée ci-dessus. Supposons que les capitaux assurés dans chaque groupe soient respectivement les suivants : c_0 pour le premier groupe ; c_1 pour le deuxième groupe ; c_2 pour le troisième ; .... ; c_{k-1} pour le $k^{ième}$ groupe ; les primes correspondant aux divers âges sont P_x ; P_{x+1} ; P_{x+2} .... P_{x+k-1}

On sait que la réserve mathématique, calculée par la méthode prospective, est:

$$_kV_x = A_{x+k} - P_x \cdot a_{x+k}$$

Transformons cette expression, en y remplaçant A_{x+k} et P_x, par leurs expressions ci-dessous :

$$A_{x+k} = 1 - d \cdot a_{x+k} \qquad P_x = \frac{1}{a_x} - d$$

il vient :

$$_kV_x = 1 - d \cdot a_{x+k} - \left(\frac{1}{a_x} - d\right) \cdot a_{x+k}$$

effectuons :

$$_kV_x = 1 - d \cdot a_{x+k} - \frac{a_{x+k}}{a_x} + d \cdot a_{x+k} = 1 - \frac{a_{x+k}}{a_x}$$

Les réserves mathématiques pour les différents groupes deviennent alors :

	Age d'entrée des assurés :					
Ier groupe	x	Réserve après	k	années :	$c_0 - c_0 \cdot \frac{a_{x+k}}{a_x}$	
IIième »	$x+1$	»	$k-1$	»	$c_1 - c_1 \cdot \frac{a_{x+k}}{a_{x+1}}$	
IIIième »	$x+2$	»	$k-2$	»	$c_2 - c_2 \cdot \frac{a_{x+k}}{a_{x+2}}$	
. . . . .						
kième »	$x+k-1$	»	1	»	$c_{k-1} - c_{k-1} \cdot \frac{a_{x+k}}{a_{x+k-1}}$	

En additionnant toutes ces réserves, on trouve la

$$\textit{Réserve totale} = \sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} c_\lambda - a_{x+k} \cdot \sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} \left(\frac{c_\lambda}{a_{x+\lambda}}\right)$$

Désignant de nouveau l'âge à l'époque d'inventaire par $z = x + k$ et la somme de tous les capitaux assurés par k, l'égalité ci-dessus devient :

$$\textit{Réserve totale} = k - a_z \cdot \sum \left(\frac{c_\lambda}{a_{x+\lambda}} \right)$$

Cette formule, traduite en langage ordinaire, indique que l'actuaire doit opérer de la façon suivante :

1° Construire un barème donnant $\frac{1}{a_{x+\lambda}}$, où λ varie de 0 à $k-1$

2° Former les produits $c_\lambda \cdot \frac{1}{a_{x+\lambda}}$ pour chacun des groupes. Le calcul de chacun de ces produits peut se faire au fur et à mesure, lors de la conclusion de chaque contrat, et la valeur obtenue s'inscrire dans une rubrique spéciale. Il suffira alors, à l'époque d'inventaire, de faire la somme de cette rubrique spéciale.

3° Multiplier cette somme par la prime unique pour une rente viagère reposant sur une tête d'âge z.

4° Soustraire ce produit de la somme des capitaux assurés.

Deuxième exemple. Assurance mixte. Durée n années.

On sait que la réserve mathématique de cette combinaison calculée par la méthode prospective, est :

$${}_kV\left\{{}_nP_x(A_x\,;\,\overline{n|})\right\} = A_{x+k\,;\,\overline{n-k|}} - P_{x\,;\,\overline{n|}} \cdot a_{x+k\,;\,\overline{n-k|}}$$

Transformons cette expression de la même manière que dans l'exemple précédent.

Nous avons à utiliser les formules :

$$A_{x+k;\,\overline{n-k|}} = 1 - d \cdot a_{x+k;\,\overline{n-k|}}$$

$$P_{x\,;\,\overline{n|}} = \frac{1}{a_{x;\,\overline{n|}}} - d$$

Remplaçons dans l'égalité précédente qui devient alors :

$$ {}_kV\left\{{}_nP_x(A_{x;\overline{n}|})\right\} = 1 - d \,.\, a_{x+k;\,\overline{n-k}|} - \left(\frac{1}{a_{n;\overline{x}|}} - d\right) \,.\, a_{x+k;\,\overline{n-k}|} $$

Effectuons les opérations indiquées; il reste simplement :

$$ {}_kV\left\{{}_nP_x(A_{x;\overline{n}|})\right\} = 1 - \frac{a_{x+k;\,\overline{n-k}|}}{a_{x;\overline{n}|}} $$

Nous répartissons de nouveau les assurés en groupes, comme précédemment.

Les réserves mathématiques pour les différents groupes deviennent alors :

Groupes :	Age d'entrée des assurés :	Capitaux assurés :	La réserve mathématique est :
1er	x	c_0	après k années : $c_0 - c_0 \,.\, \frac{a_{x+k;\,\overline{n-k}|}}{a_{x;\overline{n}|}}$
IIième	$x+1$	c_1	» $k-1$ » $c_1 - c_1 \,.\, \frac{a_{x+k;\,\overline{n+1-k}|}}{a_{x+1;\overline{n}|}}$
IIIième	$x+2$	c_2	» $k-2$ » $c_2 - c_2 \,.\, \frac{a_{x+k;\,\overline{n+2-k}|}}{a_{x+2;\overline{n}|}}$
. . . . .			
$k^{ième}$	$x+k-1$	c_{k-1}	» 1 » $c_{k-1} - c_{k-1} \,.\, \frac{a_{x+k;\,\overline{n-1}|}}{a_{x+k-1;\overline{n}|}}$

Par l'addition de toutes ces réserves, on trouve la

$$ \textit{Réserve totale} = \sum_{\lambda}^{0\ldots k-1} c_\lambda - \sum_{\lambda}^{0\ldots k-1} c_\lambda \,.\, \frac{a_{x+k;\,\overline{n+\lambda-k}|}}{a_{x+\lambda;\overline{n}|}} $$

Cette formule indique que l'actuaire doit procéder ainsi :

1° Construire un barème donnant $\frac{a_{x+k;\,\overline{n+\lambda-k}|}}{a_{x+\lambda;\overline{n}|}}$, où λ varie de 0 à $k-1$.

2° Pour chaque groupe, multiplier les capitaux assurés par le quotient ci-dessus correspondant à ce groupe et faire la somme de ces produits. Ce calcul accessoire peut se faire au fur et à mesure, lors de la signature des contrats, et s'inscrire dans une rubrique spéciale des livres de réserve.

3° Soustraire cette quantité de la somme totale des capitaux assurés.

Cette différence sera la réserve mathématique cherchée.

Troisième méthode.

Elle consiste en l'application de la méthode dite « de la différence des primes annuelles » pour calculer la réserve mathématique.

Les polices se groupent de nouveau comme précédemment.

Exemple : Assurance vie entière.

Groupes :	Age d'entrée des assurés :	Capitaux assurés :	Réserve mathématique	
*I^er^*	x	c_0 après	k années :	$(c_0 \cdot P_{x+k} - c_0 \cdot P_x) \cdot a_{x+k}$
*II^ième^*	$x+1$	c_1	$k-1$	$(c_1 \cdot P_{x+k} - c_1 \cdot P_{x+1}) \cdot a_{x+k}$
*III^ième^*	$x+2$	c_2	$k-2$	$(c_2 \cdot P_{x+k} - c_2 \cdot P_{x+2}) \cdot a_{x+k}$
. . . . .				
$k^{ième}$	$x+k-1$	c_{k-1}	1	$(c_{k-1} \cdot P_{x+k} - c_{k-1} \cdot P_{x+k-1}) \cdot a_{x+k}$

$$\text{Réserve totale} = P_{x+k} \cdot a_{x+k} \cdot \sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} c_\lambda - a_{x+k} \cdot \sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} c_\lambda \cdot P_{x+\lambda}$$

Or,

$\sum_{\lambda}^{0\ldots k-1} c_\lambda$ = Somme de tous les capitaux assurés = K

$\sum_{\lambda}^{0\ldots k-1} c_\lambda \cdot P_{x+\lambda}$ = Somme totale des primes annuelles

donc :

$$\textit{Réserve totale} = P_{x+k} \cdot a_{x+k} \cdot K - a_{x+k} \cdot \sum_{\lambda}^{0\ldots k-1} c_\lambda \cdot P_{x+\lambda}$$

ou :

$$\textit{Réserve totale} = a_{x+k} \cdot \left(P_{x+k} \cdot K - \sum_{\lambda}^{0\ldots k-1} c_\lambda \cdot P_{x+\lambda} \right)$$

Désignant de nouveau par z l'âge à l'époque d'inventaire, en sorte que $x+k=z$. On peut écrire cette formule :

$$\textit{Réserve totale} = a_z \cdot \left(P_z \cdot K - \sum_{\lambda}^{0\ldots k-1} c_\lambda \cdot P_{x+\lambda} \right)$$

Cette formule, traduite en langage ordinaire, montre qu'il faut opérer de la manière suivante :

1° multiplier la somme de tous les capitaux assurés par la prime annuelle pour une assurance vie-entière reposant sur une tête d'âge z ;

2° de ce produit, soustraire la somme de toutes les primes versées ;

3° multiplier cette différence par la prime unique pour une rente viagère immédiate reposant sur une tête d'âge z.

Le produit ainsi obtenu est égal à la réserve mathématique cherchée.

Remarque.

Les trois méthodes précédentes, appliquées à diverses combinaisons de l'assurance au décès, conduisent à des calculs assez compliqués ; et comme l'assurance mixte en particulier est très répandue, nous donnerons deux méthodes qu'il est préférable d'employer dans ce cas.

Première méthode pour l'assurance mixte.

Classifions les contrats d'après leur durée et groupons-les ensuite comme dans les méthodes précédentes.

Nous supposerons que la durée de l'assurance soit de n années. On sait que la réserve mathématique de cette combinaison, calculée par la méthode prospective, est :

$$ {}_kV\left\{{}_nP_x(A_{x;\overline{n}|})\right\} = A_{x+k;\overline{n-k}|} - P_{x;\overline{n}|} \cdot a_{x+k;\overline{n-k}|} \qquad (2)$$

Transformons cette expression comme suit ; on sait que

$$A_{x+k;\overline{n-k}|} = 1 - d \cdot a_{x+k;\overline{n-k}|}$$

Substituons dans l'expression ci-dessus ; elle deviendra :

$$ {}_kV\left\{{}_nP_x(A_{x;\overline{n}|})\right\} = 1 - a_{x+k;\overline{n-k}|} \cdot (P_{x;\overline{n}|} + d)$$

D'autre part : $a_{x+k\,;\,\overline{n-k}|} = a_{x+k} - {}_{n-k|}a_{x+k}$

Substituons dans l'égalité ci-dessus ; elle se transforme en

$$ {}_kV\left\{{}_nP_x(A_{x;\overline{n}|})\right\} = 1 - (a_{x+k} - {}_{n-k|}a_{x+k}) \cdot (P_{x;\overline{n}|} + d)$$

$$= 1 - \left(a_{x+k} - \frac{N_{x+n}}{D_{x+k}}\right) \cdot \left(P_{x\,\overline{n}|} + d\right)$$

qu'on peut écrire :

$$ {}_kV\Big\{ {}_nP_x\,(A_{x;\overline{n}|})\Big\} = 1 - P_{x;\overline{n}|} \cdot a_{x+k} - d \cdot a_{x+} $$

$$ + (P_{x;\overline{n}|} + d) \cdot \frac{N_{x+n}}{D_{x+k}} $$

$$ \text{Or,}\quad 1 - d \cdot a_{x+k} = A_{x+k} $$

$$ \text{et}\quad P_{x;\overline{n}|} = \frac{1}{a_{x;\overline{n}|}} - d $$

En substituant ces deux dernières expressions dans l'égalité précédente, il vient :

$$ {}_kV\Big\{ {}_nP_x\,(A_{x;\overline{n}|})\Big\} = A_{x+k} - P_{x;\overline{n}|} \cdot a_{x+k} + \frac{N_{x+n}}{D_{x+k}} \cdot \left(\frac{1}{a_{x;\overline{n}|}} - d + d\right) $$

c'est-à-dire :

$$ {}_kV\Big\{ {}_nP_x\,(A_{x;\overline{n}|})\Big\} = A_{x+k} - P_{x;\overline{n}|} \cdot a_{x+k} + \frac{N_{x+n}}{a_{n;\overline{x}|}} \cdot \frac{1}{D_{x+k}} $$

Groupes	Age d'entrée des assurés	Capitaux assurés	Réserve mathématique
			après k années :
I^{er}	x	c_0	$c_0 \cdot A_{x+k} - c_0 \cdot P_{x;\overline{n}\vert} \cdot a_{x+k} + c_0 \cdot \frac{N_{x+n}}{a_{x;\overline{n}\vert}} \cdot \frac{1}{D_{x+k}}$
			après $k-1$ années :
$II^{ième}$	$x+1$	c_1	$c_1 \cdot A_{x+k} - c_1 \cdot P_{x+1;\overline{n}\vert} \cdot a_{x+k} + c_1 \cdot \frac{N_{x+1+n}}{a_{x+1;\overline{n}\vert}} \cdot \frac{1}{D_{x+k}}$
			après $k-2$ années :
$III^{ième}$	$x+2$	c_2	$c_2 \cdot A_{x+k} - c_2 \cdot P_{x+2;\overline{n}\vert} \cdot a_{x+k} + c_2 \cdot \frac{N_{x+2+n}}{a_{x+2;\overline{n}\vert}} \cdot \frac{1}{D_{x+k}}$
. . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .
			après 1 année :
$k^{ième}$	$x+k-1$	c_{k-1}	$c_{k-1} \cdot A_{x+k} - c_{k-1} \cdot P_{x+k-1;\overline{n}\vert} \cdot a_{x+k} + c_{k-1} \cdot \frac{N_{x+k-1+n}}{a_{x+k-1;\overline{n}\vert}} \cdot \frac{1}{D_{x+k}}$

L'addition de toutes ces réserves des divers groupes donne la

$$\textit{réserve totale} = A_{x+k} \cdot \sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} c_\lambda - a_{x+k} \cdot \sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} c_\lambda \cdot P_{x+\lambda;\overline{n}\vert} + \frac{1}{D_{x+k}} \cdot \sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} c_\lambda \cdot \frac{N_{x+\lambda+n}}{a_{x+\lambda;\overline{n}\vert}}$$

Opérons maintenant le groupement des polices :

Désignant de nouveau par z l'âge des assurés à l'époque d'inventaire, c'est-à-dire posant $z = x + k$, on trouve donc :

Réserve totale =

$$A_z \cdot \sum_{\lambda}^{0\ldots k-1} \left(c_\lambda \cdot a_{x+k}\right) - a_z \cdot \sum_{\lambda}^{0\ldots k-1} c_\lambda \cdot P_{x+\lambda\,;\,\overline{n}|} + \frac{1}{D_z} \cdot \sum_{\lambda}^{0\ldots k-1} c_\lambda \cdot \frac{N_{x+\lambda+n}}{a_{x+\lambda;\overline{n}|}}$$

Cette formule montre qu'il faut procéder ainsi qu'il suit, pour déterminer la réserve totale :

1° Multiplier la somme de tous les capitaux assurés par la prime unique pour une assurance « vie entière » reposant sur une tête d'âge z.

2° Multiplier la somme de toutes les primes versées par la prime unique pour une rente viagère immédiate reposant sur une tête d'âge z.

3° Diviser la somme $\sum_{\lambda}^{0\ldots k-1} c_\lambda \frac{N_{x+\lambda+n}}{a_{x+\lambda+\overline{n}|}}$ par D_z

4° Additionner le premier et le dernier résultat et en soustraire le second.

Cette différence représente la réserve cherchée.

Remarque : La quantité $\frac{N_{x+\lambda+n}}{a_{x+\lambda\overline{n}|}}$ restant constante pour chaque groupe, on la calculera une fois pour toutes, et lors de l'inventaire, on la multipliera par la somme des capitaux qui restent assurés dans le groupe.

Deuxième méthode pour l'assurance mixte.

Nous supposons toujours que la durée du contrat est de n années.

On sait que la réserve mathématique de cette combinaison, calculée par la méthode rétrospective, est :

$$ {}_kV\left\{ {}_nP_x(A_{x;\overline{n}|}) \right\} = \frac{N_x - N_{x+k}}{D_{x+k}} \cdot P_{x;\overline{n}|} - \frac{M_x - M_{x+k}}{D_{x+k}} $$

$$ = \frac{N_x}{D_{x+k}} \cdot P_{x;\overline{n}|} - \frac{N_{x+k}}{D_{x+k}} \cdot P_{x;\overline{n}|} - \frac{M_x}{D_{x+k}} + \frac{M_{x+k}}{D_{x+k}} $$

$$ \text{Or,} \quad \frac{M_{x+k}}{D_{x+k}} = A_{x+k}, \quad \text{et} \quad \frac{N_{x+k}}{D_{x+k}} = a_{x+k} $$

Substituons dans l'égalité précédente qui devient alors :

$$ (5) \qquad {}_kV\left\{ {}_nP_x(A_{x;\overline{n}|}) \right\} = A_{x+k} - P_{x;\overline{n}|} \cdot a_{x+k} + \frac{N_x \cdot P_{x;\overline{n}|} - M_x}{D_{x+k}} $$

Dans le 3ième terme, introduisons P_x, c'est-à-dire la prime annuelle d'une assurance « vie entière », à la place de $P_{x;\overline{n}|}$, en posant $P_{x;\overline{n}|} = P_x + h_{x;\overline{n}|}$; il vient :

$$ \frac{N_x \cdot P_{x;\overline{n}|} - M_x}{D_{x+k}} = \frac{N_x \cdot (P_x + h_{x;\overline{n}|}) - M_x}{D_{x+k}} $$

$$ = \frac{N_x \cdot P_x + N_x \cdot h_{x;\overline{n}|} - M_x}{D_{x+k}} $$

$$ \text{Or,} \quad P_x = \frac{M_x}{N_x}, \quad \text{d'où} \quad P_x \cdot N_x = M_x, \quad \text{en sorte qu'il vient :} $$

$$ \frac{N_x \cdot P_{x;\overline{n}|} - M_x}{D_{x+k}} = \frac{N_x \cdot h_{x;\overline{n}|}}{D_{x+k}} $$

Substituant cela dans l'équation (5), celle-ci devient finalement :

$$ (6) \qquad {}_kV\left\{ {}_nP_x(A_{x;\overline{n}|}) \right\} = A_{x+k} - P_{x;\overline{n}|} \cdot a_{x+k} + \frac{N_x \cdot h_{x;\overline{n}|}}{D_{x+k}} $$

Groupons maintenant les polices de la même manière que précédemment ; le groupement est indiqué par le tableau que voici :

Groupes	Age d'entrée des assurés	Capitaux assurés	Réserve mathématique
			après k années :
Ier	x	c_0	$c_0 \cdot A_{x+k} - c_0 \cdot P_{x;\overline{n}|} \cdot a_{x+k} + c_0 \cdot \dfrac{N_x \cdot h_{x;\overline{n}|}}{D_{x+k}}$
			après $k-1$ années :
IIième	$x+1$	c_1	$c_1 \cdot A_{x+k} - c_1 \cdot P_{x+1;\overline{n}|} \cdot a_{x+k} + c_1 \cdot \dfrac{N_{x+1} \cdot h_{x+1;\overline{n}|}}{D_{x+k}}$
			après $k-2$ années :
IIIième	$x+2$	c_2	$c_2 \cdot A_{x+k} - c_2 \cdot P_{x+2;\overline{n}|} \cdot a_{x+k} + c_2 \cdot \dfrac{N_{x+2} \cdot h_{x+2;\overline{n}|}}{D_{x+k}}$
. . . . .			. . . . .
			après 1 année :
kième	$x+k-1$	c_{k-1}	$c_{k-1} \cdot A_{x+k} - c_{k-1} \cdot P_{x+k-1;\overline{n}|} \cdot a_{x+k} + c_{k-1} \cdot \dfrac{N_{x+k-1} \cdot h_{x+k-1;\overline{n}|}}{D_{x+k}}$

L'addition des réserves de tous ces groupes donne la

$$\text{réserve totale} = A_{x+k} \cdot \sum_{\lambda}^{0\ldots k-1} c_\lambda - a_{x+k} \cdot \sum_{\lambda}^{0\ldots k-1} c_\lambda \cdot P_{x+\lambda;\overline{n}|} + \frac{1}{D_{x+k}} \cdot \sum_{\lambda}^{0\ldots k-1} c_\lambda \cdot \left(N_{x+\lambda} \cdot h_{x+\lambda;\overline{n}|} \right)$$

En appelant z l'âge à l'inventaire et K la somme de tous les capitaux assurés, on peut écrire cette formule :

$$\textit{Réserve totale} =$$

$$A_z \cdot K - a_z \cdot \sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} c_\lambda \cdot P_{x+\lambda;\overline{n}|} + \frac{1}{D_z} \cdot \sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} \left(c_\lambda \cdot N_{x+\lambda} \cdot h_{x+\lambda;\overline{n}|} \right)$$

L'actuaire doit donc opérer de la façon suivante :

1° Multiplier la somme de tous les capitaux assurés par la prime unique pour une assurance « vie entière » reposant sur une tête d'âge z.

2° Multiplier la somme de toutes les primes versées par la prime unique pour une rente viagère immédiate reposant sur une tête d'âge z.

3° Diviser la somme $\sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} \left(c_\lambda \cdot N_{x+\lambda} \cdot h_{x+\lambda;\overline{n}|} \right)$ par D_z

4° Additionner le premier et le dernier résultat, et soustraire de cette somme le deuxième ; la différence sera la réserve cherchée.

Remarques :

La quantité $N_{x+\lambda} \cdot h_{x+\lambda;\overline{n}|}$ reste constante pour chaque groupe jusqu'à l'expiration du contrat.

Par cette méthode, nous évitons une division que nécessite l'emploi de la première méthode.

Un simple changement de signe au troisième terme permet d'employer la formule ci-dessus pour le cas de l'assurance temporaire au décès, comme le démontre l'exemple suivant :

Assurance au décès, temporaire pendant n années.

Nous avons trouvé, par la méthode rétrospective :

$$\left[{}_kV \, {}_nP_x \, ({}_{|n}A_x) \right] = A_{x+k} - {}_nP_x \, ({}_{|n}A_x) \cdot a_{x+k}$$

$$(7) \qquad + \frac{N_x \cdot {}_nP_x - M_x}{D_{x+k}}$$

Dans le troisième terme, introduisons P_x, c'est-à-dire la prime annuelle pour une assurance « vie entière », à la place de ${}_nP_x$; posons à cet effet :

$$ {}_nP_x = P_x - {}_nh'_x ,$$

il vient :

$$\frac{N_x \cdot {}_nP_x - M_x}{D_{x+k}} = \frac{N_x \cdot (P_x - {}_nh'_x) - M_x}{D_{x+k}}$$

$$= \frac{N_x \cdot P_x - N_x \cdot {}_nh'_x - M_x}{D_{x+k}}$$

Or, $P_x = \frac{M_x}{N_x}$; de sorte qu'il vient :

$$\frac{N_x \cdot {}_nP_x - N_x \cdot {}_nh'_x - M_x}{D_{x+k}} = - \frac{N_x \cdot {}_nh'_x}{D_{x+k}}$$

Substituons dans l'équation (7) :

$${}_kV\left[{}_nP_x \, ({}_{|n}A_x) \right] = A_{x+k} - {}_xP_x \, ({}_{|n}A_x) \cdot a_{x+k} - \frac{N_x \cdot {}_nh'_x}{D_{x+k}}$$

Groupons les polices comme dans l'exemple précédent : cela donne le tableau suivant :

Groupes	Age d'entrée des assurés	Capitaux assurés	Réserve mathématique
			après k années :
I^{er}	x	c_0	$c_0 \cdot A_{x+k} - c_0 \cdot {}_nP_x(\lvert {}_nA_x) \cdot a_{x+k} - c_0 \cdot \dfrac{N_x \cdot {}_nh'_x}{D_{x+k}}$
			après $k-1$ années :
$II^{ième}$	$x+1$	c_1	$c_1 A_{x+k} - c_1 \cdot {}_nP_{x+1}(\lvert {}_nA_x) \cdot a_{x+k} - c_1 \cdot \dfrac{N_{x+1} \cdot {}_nh'_{x+1}}{D_{x+k}}$
			après $k+2$ années :
$III^{ième}$	$x+2$	c_2	$c_2 \cdot A_{x+k} - c_2 \cdot {}_nP_{x+2} \cdot a_{x+k} - c_2 \cdot \dfrac{N_{x+2} \cdot {}_nh'_{x+2}}{D_{x+k}}$
. . .	. . .	. . .	. . . . .
			après 1 année :
$k^{ième}$	$x+k-1$	c_{k-1}	$c_{k-1} \cdot A_{x+k} - c_{k-1} \cdot {}_nP_{x+k-1} \cdot a_{x+k} - c_{k-1} \cdot \dfrac{N_{x+k-1} \cdot {}_nh'_{x+k-1}}{D_{x+k}}$

L'addition des réserves de tous ces groupes donne la

$$\text{réserve totale} = A_{x+k} \cdot \sum_{\lambda}^{0\ldots k-1} c_\lambda - a_{x+k} \cdot \sum_{\lambda}^{0\ldots k-1} c_\lambda \cdot {}_nP_{x+\lambda} - \frac{1}{D_{x+k}} \cdot \sum_{\lambda}^{0\ldots k-1} \left(c_\lambda \cdot N_{x+\lambda} \cdot {}_nh'_{x+\lambda}\right)$$

Désignant de nouveau par z l'âge à l'inventaire et par K la somme de tous les capitaux assurés, on aura la formule :

Réserve totale =

$$A_z \cdot K - a_z \cdot \sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} \left(c_\lambda \cdot {}_nP_{x+\lambda} \right) - \frac{1}{D_z} \cdot \sum_{\lambda}^{0 \ldots k-1} \left(c_\lambda \cdot N_{x+\lambda} \cdot {}_nh'_{x+\lambda} \right)$$

IV. DE QUELS FACTEURS DÉPEND LE MONTANT DE LA RÉSERVE MATHÉMATIQUE ?

Actuellement, on emploie en affaires *le pour cent* comme mesure de comparaison. Ainsi, les fluctuations dans les assurances se mesurent en pour cent. Le public est convaincu que la valeur d'une société d'assurance est prouvée par le montant de sa réserve mathématique. Le client voulant contracter une assurance fera une comparaison superficielle entre la proportion du montant des réserves mathématiques comparé au montant des capitaux assurés, et il préfèrera certainement la société dont le pour cent de la réserve est le plus élevé. Or, de ce fait, une société peut être injustement discréditée, ce que nous nous proposons de démontrer.

Nous avons eu l'occasion d'entendre demander par des mathématiciens, des ingénieurs, des personnes intelligentes, comment il se fait que la proportion des réserves mathématiques, comparées au total des capitaux assurés, varie d'une société à l'autre. Pour donner plus de clarté à notre démonstration, nous utiliserons le tableau suivant :

TABLEAU I [1]

Année	ANGLETERRE			FRANCE		
	Total des capitaux assurés, en millions de francs	Total des réserves mathématiques à la fin de chaque année, en millions de francs	Rapport des réserves mathématiques et des capitaux assurés, en %	Total des capitaux assurés, en millions de francs	Total des réserves mathématiques à la fin de chaque année, en millions de francs	Rapport des réserves mathématiques et des capitaux assurés, en %
1859	4 000	1 212,0	30,30	194	70	36,08
1860	4 250	1 302,0	30,64	230	80	34,78
1861	4 500	1 392,0	30,93	253	90	35,56
1862	4 750	1 482,0	31,20	388	100	25,69
1863	5 000	1 572,0	31,44	358	110	30,72
1864	5 268	1 630.3	30,95	421	120	28,50
1865	5 523	1 655,3	29,97	572	130	22,72
1866	5 791	1 775,7	30,66	590	140	23,73
1867	6 047	1 895,7	31,35	639	160	25,04
1868	6 325	1 935,7	30,60	798	180	22,56
1869	6 725	1 976,7	29,39	919	200	21,76
1870	7 274	2 155,1	29,63	1 008	219	21,72
1871	8 282	2 232,2	26,95	973	236	24,25
1872	8 608	2 309,4	26.83	1 008	265	26,29
1873	8 817	2393,0	27,14	1 110	274	24,68
1874	9 056	2 479 4	27,38	1 128	306,1	24,92
1875	9 329	2 562,2	27,46	1 358	325,6	26,92
1876	9 664	2 661,9	27,54	1 507	370,0	24,55
1877	9 860	2 752,8	27,92	1 625	405,0	26,15
1878	10 125	2 819,2	27,85	1 779	461,0	27,59
1879	10 375	2 920,0	28,14	1 955	515,0	26,34
1880	10 500	3 027,9	28,84	2 183	584,3	26,77
1881	10 625	3 108,3	29,264	2 487	631,1	25,38
1882	10 750	3 265,9	30,38	2 760	699,3	25,34
1883	11 125	3 283,1	29.51	2 969	714,2	24,06

[1] M. Marco Besso : Progrès des assurances sur la vie pendant la période de 1859 à 1883. *Le Moniteur des assurances,* tome XIX, 15 janvier 1887.

TABLEAU I

ALLEMAGNE			ÉTATS-UNIS		
Total des capitaux assurés, en millions de francs	Total des réserves mathématiques à la fin de chaque année, en millions de francs	Rapport des réserves mathématiques et des capitaux assurés, en %	Total des capitaux assurés, en millions de francs	Total des réserves mathématiques à la fin de chaque année, en millions de francs	Rapport des réserves mathématiques et des capitaux assurés, en %
363	74	20,39	764	83,5	10,92
396	85	21,44	884	92,7	10,49
438	96,6	22,05	887	98,7	11,12
501	104,7	20,87	993	128,5	12,94
581	128,8	22,17	1 445	154,7	10,71
672	136.5	20,31	2 137	187,5	8,77
781	143,7	18,39	3 137	250,2	7,98
848	153,9	18,15	4 672	354,2	7,58
957	169,5	17,72	6 273	478,4	7,63
1 079	189,0	17,89	8 657	730,4	8,44
1 211	192,0	15,85	9 918	977,0	9,85
1 263	195,0	15,44	10 929	1 194,0	10,93
1 346	197,9	14,70	11 348	1374,6	12,11
1 495	211,3	14,13	11 420	1556,9	13,63
1 677	234,9	14,01	11 265	1 682,4	14,93
1 859	258,9	15.00	10 758	1 803,3	16,72
2 037	284,5	13,97	10 379	1 848.6	17,80
2 197	311,8	14,19	9 344	1 869,9	20,01
2 311	339,8	14,70	8 403	1 808,0	21,52
2 417	367,9	15,22	7 957	1 833,8	23,04
2 534	400,6	15,81	7 776	1 845,5	23,73
2 666	437,5	16,41	7 970	1 921,4	24,11
2 798	477,8	17,08	8 491	1 927,8	22,68
2 951	520,4	17,63	8 843	2 018,4	22,82
3 190	542,5	17,01	9 578	2 230,5	23,29

A première vue déjà, la proportion des réserves mathématiques ne paraît pas coïncider dans les différents pays.

Si nous considérons par exemple l'année 1866, nous remarquons que la proportion des réserves mathématiques des pays indiqués est sensiblement différente : en Angleterre 30,66 %, en France 23,75 %, en Allemagne 18,15 % et aux États-Unis 7,58 %.

Si nous comparons la proportion des réserves mathématiques des compagnies d'assurance suisses d'il y a trente ans, avec celles des compagnies des autres pays, nous remarquons aussi une différence frappante.

Quelles conclusions en tireront les laïques superficiels ? Sans doute : que les compagnies des États-Unis sont moins solides que celles de l'Europe ; c'est là une conclusion prématurée.

Or, en suivant la proportion des réserves mathématiques d'une même société, on remarque que le pour cent varie sensiblement.

Voir le tableau II ci-après.

TABLEAU II

Année	SUISSE [1]		
	Total des capitaux assurés Francs	Réserves pour risques en cours et corrections relatives à l'échéance des primes Francs	Proportion de la réserve mathématique et des capitaux assurés, en % [2]
1891	182 367 763	67 091 416,28	36,79
1892	188 914 479	72 204 018,47	43,51
1893	199 348 564	76 830 168,46	43,56
1894	213 524 628	82 441 062,58	38,61
1895	227 386 645	89 085 800,27	39,18
1896	240 493 229	96 592 053,14	40,16
1897	252 638 601	104 408 661,97	41,33
1898	264 713 035	112 735 532,88	42,59
1899	277 093 187	122 104 420,82	44,06
1900	287 661 826	131 369 156,10	45,66
1901	297 069 702	140 401 502,99	47,26
1902	310 380 476	151 311 717,69	48,75
1903	326 254 015	163 708 630,28	50,18
1904	341 781 402	174 514 264,48	51,06
1905	359 053 475	187 097 098,58	52,10
1906	377 795 613	201 127 221,50	53,24
1907	403 023 990	214 674 671,93	53,27
1908	426 604 377	228 517 330,12	53,56
1909	450 676 499	243 322 200,01	53,99
1910	478 241 695	260 695 032,67	54,51
1911	504 317 338	271 412 793,73	53,82
1912	532 842 458	295 858 878,72	55,52

[1] Ne sont pas comprises les sociétés étrangères opérant en Suisse. Ces chiffres sont extraits des rapports du Bureau fédéral des assurances en Suisse, de 1891 à 1912.

[2] Le pour cent de la réserve est majoré par le fait que la réserve des rentes y est comprise.

Il arrive que les capitaux assurés augmentent considérablement, tandis que, dans le même laps de temps, la réserve mathématique diminue. En 1911, par exemple, à la « Société suisse d'assurances générales sur la vie » à Zurich, il y eut augmentation des capitaux assurés de Fr. 7 603 075,— et diminution de la réserve mathématique de Fr. 585 373,78. Ce fait pourrait aussi induire en erreur au sujet de la sécurité réelle offerte par la société en question à cette date.

TABLEAU III

Société suisse d'assurances générales sur la vie

Zurich

Année	Capitaux assurés Francs	Réserves pour risques en cours et corrections relatives à l'échéance des primes Francs	Proportion de la réserve mathématique et des capitaux assurés, calculée en % [1]
1906	143 213 808	72 994 719,28	50,97
1907	151 384 149	77 429 375,13	51,15
1908	159 095 179	81 951 576,01	51,51
1909	166 988 172	86 585 960,63	51,85
1910	174 577 795	92 801 085,94	53,68
1911	182 180 870	92 215 712,16	50,62
1912	190 682 258	104 308 046,37	54,70

[1] Extraits des rapports du Bureau fédéral des assurances en Suisse, de 1906 à 1912.

Société coopérative d'assurance et d'épargne des Fonctionnaires bulgares

Fondée le 1er Mai 1905

Année	Capitaux assurés Francs	Réserves mathématiques Francs	Proportion des réserves mathématiques et des capitaux assurés, en %
1905	2 087 750	33 033,61	1,58
1906	4 739 750	165 180,51	3,43
1907	7 311 100	399 421,02	5,46
1908	9 005 350	704 062,19	7,82
1909	12 038 600	1 072 552,82	8,91
1910	19 331 850	1 626 529,62	8,41
1911	36 855 150	2 473 852,41	7,77
1912	41 543 650	3 579 814,92	8,62
1913	44 981 600	4 524 426,61	10,96

Ces deux cas nous amènent à nous demander à quoi tient cette variation. Y a-t-il quelques particularités qui exercent une influence sur les réserves mathématiques, et si oui, quelles sont-elles?

Il existe certainement plusieurs causes, les unes plus tangibles, les autres moins.

Nous pouvons diviser ces causes en deux groupes que nous appellerons : *les causes explicites*, et *les causes implicites*.

Causes explicites.

I. La Table de mortalité.

Il est évident qu'en employant deux tables de mortalité différentes pour calculer la réserve mathématique des mêmes contrats, on ne peut pas obtenir le même résultat. Cette distinction se voit aisément dans le tableau suivant.

Réserve d'un contrat d'assurance de Fr. 100000,— pour la vie entière, conclu à l'âge de trente ans, d'après une table ancienne française (table de *Duvillard*) et une table moderne anglaise (table H^m).

TABLEAU IV

Durée du Contrat en années n	Réserve mathématique $100\,000\ {}_nV_{30}$, calculée d'après la	
	Table de Duvillard 4 % Francs	Table H^m 4 % Francs
5	4 714	5 152
10	10 137	11 010
15	16 376	17 817
20	23 398	25 343
25	31 035	33 580
30	39 020	42 314
35	47 066	51 076
40	54 836	59 776
45	61 935	67 831
50	67 602	74 605
55	69 618	79 826
60	70 640	85 087
65	75 120	92 220

Nous voyons, par exemple, que cinquante ans après la conclusion du contrat, la réserve mathématique se monte : d'après la table de *Duvillard,* à Fr. 67602,— et d'après la table H^m à Fr. 74605,— ; la différence, qui atteint le 7 % du montant, provient donc uniquement de la différence des tables choisies.

II. Le taux de l'intérêt.

Le taux de l'intérêt joue, dans le calcul de la réserve mathématique, un rôle considérable.

Quand on diminue de 1,5 % le taux de l'intérêt, la réserve augmente de 2 à 4 % de sa valeur.

Le tableau suivant nous en donne la preuve dans le cas d'une assurance « vie entière », c'est-à-dire d'une assurance simple en cas de décès, achetée par primes annuelles constantes, payables aussi longtemps que vit l'assuré (x), le capital assuré échéant à la fin de l'année d'assurance contenant le décès de (x) :

TABLEAU V

Table H^m

Après	Réserve mathématique d'une assurance dite « vie entière ». Age d'entrée : $x = 30$ ans. Capital assuré : Fr. 100,—.				
	En supposant un taux d'intérêts de :				
	3 %	3,5 %	4 %	4,5 %	5 %
1 année	1.17	1,07	0,97	0,89	0,81
5 années	6,14	5,62	5,15	41,73	4,34
10 »	12,90	11,91	11,01	10,18	9,42
20 »	28,61	26,93	25,34	23,86	22,46
30 »	46,16	44,20	42,31	40,51	38,79
40 »	63.31	61,52	59,78	58,07	56,41
50 »	77,27	75,94	74,61	73,29	71,98
60 »	86,87	85,98	85,09	84,79	83,29

III. La méthode de calcul de la réserve mathématique.

La manière de calculer exerce une influence sur le montant de la réserve mathématique, si ce calcul ne se base pas sur les primes pures. Les résultats ne sont pas identiques, selon que la réserve est calculée avec les primes pures ou chargées, ou encore selon la « méthode de *Zillmer* ». Pour un exemple d'assurance « vie entière », la différence est indiquée par les deux tableaux suivants :

Réserve d'un contrat d'assurance « vie entière », le capital assuré étant de Fr. 1000,—. On suppose, successivement, que le contrat a été conclu par un sujet âgé de trente, quarante, soixante ans. Pour calculer la réserve mathématique de ces trois contrats, on a pris : une première fois, les primes pures ou mathématiques; une deuxième fois : les primes chargées. (Table de mortalité des 17 compagnies anglaises, taux de 4 %.)

TABLEAU VI

Age	Prime annuelle		Réserve mathématique (calculée en prenant pour base les primes pures, puis les primes chargées)					
			Après 5 ans		Après 10 ans		Après 20 ans	
	nette	chargée	nette	chargée	nette	chargée	nette	chargée
30	16,97	21,30	49,63	-25,39	107,91	38,23	253,29	193,97
40	23,68	28,60	76,79	3,68	162,97	96.70	352,34	301,60
60	57,56	70,40	151,63	38,01	226,84	132,75	352,48	492,57

Méthode de Zillmer.

Assurance « vie entière », âge à l'entrée : 30 ans; chargement : $s = 1{,}5\ ^0/_0$: capital assuré : Fr. 1000, acheté par primes annuelles constantes. Réserve mathématique après 5 ans, après

10 ans, après 20 ans. La réserve mathématique est calculée une première fois en prenant les primes pures, ce qui donne ${}_nV_{30}$; une deuxième fois, en prenant les primes chargées, selon la « méthode de *Zillmer* », ce qui donne ${}^z_nV_{30}$.

TABLEAU VII

Réserve mathématique		
Après années n	Primes nettes ${}_nV_{30}$	Méthode Zillmer ${}^z_nV_{30}$
5	59,39	45,28
10	126,46	113,35
20	282,69	271,92

IV. L'influence des combinaisons.

Chaque société trouve un champ d'activité spécial, les unes opèrent surtout parmi les agriculteurs, les autres parmi les commerçants, etc. Selon la diversité de ces catégories, les sociétés emploient différentes combinaisons ; par exemple une société pratiquera de préférence, peut-être même exclusivement les assurances en cas de décès dites « vie entière », une autre société plutôt les assurances mixtes, etc. En Amérique, l'assurance temporaire et l'assurance en cas de décès « vie entière », sont plus employées qu'en Europe où l'assurance mixte domine. Cette particularité a, sur le montant de la réserve, une influence très marquée, la plus considérable de celles signalées dans notre exposé.

Exemple. Supposons trois sociétés, A, B, C, fondées en même temps (disons le 1er janvier 1900), ayant les mêmes bases de calcul, à savoir : la table de mortalité H^m et le taux de 4 %, Supposons que ces trois sociétés ne pratiquent toutes trois que

des assurances en cas de décès. La société A pratique seulement la combinaison « vie entière »; la société B seulement « l'assurance mixte », et la société C seulement « l'assurance temporaire au décès ».

Supposons qu'au début de 1910, les trois sociétés aient même nombre d'assurés par groupe de même âge, et même total de capitaux assurés. Le tableau suivant montre la différence considérable de leurs réserves.

TABLEAU VIII

Sociétés A, B et C					Réserve mathématique au 1er janvier 1910		
Année	Groupe	Nombre des polices en cours	Age à l'entrée	Capitaux assurés	« Vie entière » Société A	« Assurance mixte » durée 20 ans Société B	« Assurance temporaire » durée 10 ans Société C
1900	I	500	25	5 000 000	465 150	1 942 500	0
1901	II	1000	30	10 000 000	978 000	3 400 000	13 565,41
1904	III	700	35	7 000 000	526 260	1 480 500	23 252,13
1905	IV	800	40	8 000 000	611 920	1 384 000	55 013,22
1907	V	600	45	6 000 000	324 780	610 800	46 529,13
1908	VI	900	20	9 000 000	119 070	587 700	4 839,66
1909	VII	500	40	5 000 000	71 500	161 500	8 802,67
		5000		50 000 000	3 096 680	3 567 000	152 002,22
					61,93 ‰	191,34 ‰	3,04 ‰

Dix ans après la fondation de ces trois sociétés, soit le 1er janvier 1910, le rapport de la réserve mathématique aux capitaux assurés est de 61,93 ‰ pour la société A, de 191,34 ‰ pour la société B, et de 3,04 ‰ pour la société C. Cette différence notable pourrait facilement induire en erreur des personnes jugeant superficiellement, quant à la solidité des sociétés en question.

Causes implicites.

Nous appelons ces causes « implicites », parce qu'elles ne ressortent pas, ou du moins pas immédiatement, des comptes-rendus annuels que publient les compagnies d'assurance.

Ces causes tiennent à la pratique des affaires. Certaines compagnies, quoique ayant les mêmes bases, ne conservent pas, au bout d'un certain temps, la même proportion entre capitaux assurés et réserves mathématiques. Ce manque d'identité peut conduire à de fausses déductions. On a vu, de ce fait, des avocats baser la défense de leurs causes sur des conclusions erronées.

Pour développer cet exposé aussi clairement que possible, nous nous servirons d'une série d'exemples présentant chacun une particularité différente.

I. Influence de la marche de l'assurance.

La réserve diffère entre deux sociétés bien qu'elles aient même roulement d'affaires, si la « marche » des engagements, ou l'allure que suit le nombre des contrats conclus chez elles suit une progression différente.

Exemple. Admettons que deux sociétés, A et B, aient été fondées en 1900. Les tarifs ont été calculés, pour chacune, d'après la table de mortalité H^m et avec le taux de l'intérêt fixé à 4 %. Supposons, de plus, que les sociétés emploient seulement deux combinaisons d'assurance, à savoir : « assurance vie entière », et « assurance mixte ».

Pour simplifier l'exemple, nous admettrons que les assurés ont signé leurs contrats par groupes de même âge et aux dates figurant au tableau IX.

Au 1er janvier 1910, le montant total des sommes assurées est égal chez les deux sociétés, mais divisé par groupes, avec une variation en sens inverse, comme le tableau l'indique.

TABLEAU IX

Année	Groupe	Age d'entrée	Vie entière			
			Capitaux assurés		Réserve mathématique au 1er janvier 1910	
			Société A	Société B	Société A	Société B
			Fr.	Fr.	Fr.	Fr.
1900	I	35	1 000 000	5 000 000	133 530	667 650
1903	II	40	2 000 000	4 000 000	219 200	438 400
1904	III	43	3 000 000	3 000 000	311 190	311 190
1906	IV	45	4 000 000	2 000 000	290 800	145 400
1909	V	47	5 000 000	1 000 000	94 750	18 950
			15 000 000	15 000 000	1 049 470=	1 581 590=
					6,996 %	10,543 %

Année	Groupe	Age d'entrée	Assurance mixte, durée 20 ans			
			Capitaux asurés		Réserve mathématique au 1er janvier 1910	
			Société A	Société B	Société A	Société B
			Fr.	Fr.	Fr.	Fr.
1900	I	25	2 000 000	10 000 000	777 000	3 885 000
1903	II	30	4 000 000	8 000 000	1 011 200	2 022 400
1904	III	35	6 000 000	6 000 000	1 269 000	1 269 000
1906	IV	40	8 000 000	4 000 000	1 088 000	544 000
1909	V	45	10 000 000	2 000 000	339 000	67 800
			30 000 000	30 000 000	4 484 200	7 788 200
					14,947 %	25,96 %
					Réserve mathématique totale au 1er janvier 1910	
					5 553 670=	936 979=
					12,297 %	20,821 %

Après dix ans d'existence, au 1er janvier 1910, leurs comptes-rendus accusent, avec un même montant de capitaux dans les mêmes combinaisons, un montant de réserves mathématiques très différent. Ainsi la proportion des réserves et des capitaux assurés est de 6,996 % pour la société A (combinaison vie entière) et de 10,543 % pour la société B (même combinaison). Différence : 4 %. Pour la combinaison assurance mixte, la différence entre les deux sociétés est de 11 %, et pour les deux combinaisons réunies, cette différence se monte à 8,5 %.

Nous savons que les deux sociétés offrent la même sécurité ; cependant, à première vue, on pourrait estimer au-dessous de leur valeur, les garanties offertes par la société A, si l'on comparait uniquement les rapports des réserves mathématiques au total des sommes assurées.

Essayons de nous rendre compte de l'influence de l'allure des acquisitions nouvelles sur la réserve mathématique en la traitant, non en exemples numériques, mais

En général.

Deux sociétés A et B pratiquent la même combinaison et ont des tarifs calculés d'après les mêmes bases ; en supposant qu'à une date quelconque, les capitaux assurés en vigueur par groupe soient les suivants :

$$\text{Société A} : b_1 ; b_2 ; b_3 \ldots . b_n$$
$$\text{Société B} : c_1 ; c_2 ; c_3 \ldots . c_n$$

Nous indiquons la différence annuelle entre chaque groupe de capitaux assurés par α_λ ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots . n$).

Posons

$$b_\lambda = c_\lambda + \alpha_\lambda$$

et la réserve mathématique pour un franc assuré pour les différents groupes de capitaux assurés par V_λ ($\lambda = 1, 2, 3; \ldots . n$).

A cette date, la réserve mathématique pour la société A est :

$$\text{Réserve totale} = b_1 \cdot V_1 + b_2 \cdot V_2 + \ldots + b_n \cdot V_n$$

$$= \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} b_\lambda \cdot V_\lambda$$

Pour la société B :

$$\text{Réserve totale} = \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} c_\lambda \cdot V_\lambda$$

La proportion, ou le pour-cent de la réserve mathématique comparée aux capitaux assurés est :

Pour la société A : $\quad 100 \cdot \dfrac{\sum_{\lambda}^{1 \ldots n} b_\lambda \cdot V_\lambda}{\Sigma\, b_\lambda}$

Pour la société B : $\quad 100 \cdot \dfrac{\sum_{\lambda}^{1 \ldots n} c_\lambda \cdot V_\lambda}{\Sigma\, c_\lambda}$

Nous pouvons remplacer b_λ par $c_\lambda + \alpha_\lambda$ et nous obtiendrons :

Pour la société A :

$$100 \cdot \frac{\sum_{\lambda}^{1 \ldots n} b_\lambda \cdot V_\lambda}{\Sigma\, b_\lambda} = 100 \cdot \frac{\sum_{\lambda}^{1 \ldots n} (c_\lambda + \alpha_\lambda) \cdot V_\lambda}{\Sigma\, (c_\lambda + \alpha_\lambda)}$$

$$= 100 \cdot \frac{\sum_{\lambda}^{1 \ldots n} c_\lambda \cdot V_\lambda + \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} \alpha_\lambda \cdot V_\lambda}{\sum_{\lambda}^{1 \ldots n} c_\lambda + \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} \alpha_\lambda}$$

Posons $\sum_{\lambda}^{1 \ldots n} c_\lambda = K \quad$ et $\quad \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} c_\lambda \cdot V_\lambda = B$

En remplaçant, nous obtiendrons comme pour-cent de la réserve mathématique :

$$\text{Pour la société A :} \quad 100 \,.\, \frac{B + \sum_{1}^{1\ldots n} \alpha_\lambda \,.\, V_\lambda}{K + \sum_{1}^{1\ldots n} \alpha_\lambda}$$

$$\text{Pour la société B :} \quad 100 \,.\, \frac{B}{K}$$

La différence des pour-cent de la réserve mathématique est :

$$100 \,.\, \frac{B + \sum_{1}^{1\ldots n} (\alpha_\lambda \,.\, V_\lambda)}{K + \sum \alpha_\lambda} - 100 \,.\, \frac{B}{K} = 100 \,.\, \frac{B \,.\, K + K \,.\, \sum_{1}^{1\ldots n} (\alpha_\lambda \,.\, V_\lambda) - B \,.\, K - B \,.\, \sum_{1}^{1\ldots n} \alpha_\lambda}{K^2 + K \,.\, \sum_{1}^{1\ldots n} \alpha_\lambda}$$

$$= 100 \,.\, \frac{K \,.\, \sum_{1}^{1\ldots n} (\alpha_\lambda \,.\, V_\lambda) - B \,.\, \sum_{1}^{1\ldots n} \alpha_\lambda}{K^2 + K \,.\, \sum_{1}^{1\ldots n} \alpha}$$

Cas particulier.

Supposons $\sum_{1}^{1\ldots n} \alpha_\lambda = 0$, sans que toutes les quantités α_λ soient nulles à la fois ; la différence des pour-cent de la réserve mathématique est alors :

$$100 \,.\, \frac{K \sum_{1}^{1\ldots n} (\alpha_\lambda \,.\, V_\lambda)}{K^2} = 100 \,.\, \frac{\sum_{1}^{1\ldots n} (\alpha_\lambda \,.\, V_\lambda)}{K}$$

Le rapport des pour-cent de la réserve mathématique, dans les Sociétés A et B, en général, est égal à

$$\frac{K \,.\, \left\{ B + \sum_{1}^{1\ldots n} (\alpha_\lambda \,.\, V_\lambda) \right\}}{B \,.\, \left\{ K + \sum_{1}^{1\ldots n} \alpha_\lambda \right\}}$$

Dans notre cas $\sum_{\lambda}^{1\ldots n} \alpha_\lambda = 0$; nous obtiendrons donc :

$$\frac{K \cdot B + K \cdot \sum_{\lambda}^{1\ldots n} (\alpha_\lambda \cdot V_\lambda)}{K \cdot B} = 1 + \frac{K \cdot \sum_{\lambda}^{1\ldots n} (\alpha_\lambda \cdot V_\lambda)}{B}$$

$$= 1 + \frac{\sum_{\lambda}^{1\ldots n} (\alpha_\lambda \cdot V_\lambda)}{B}$$

Exemple. Assurance mixte ; durée : 20 ans, âge à l'entrée : 20 ans. Table de mortalité H^m et taux 4 %. Les capitaux assurés sont, dans la supposition que nous faisons, donnés par le tableau suivant :

Année de formation		Société A		Société B		α_λ
		Fr.		Fr.		Fr.
1901	Ier groupe	10 000 000	=	5 000 000	+	5 000 000
1902	IIième »	0		0		0
1903	IIIième »	30 000 000	=	20 000 000	+	10 000 000
1904	IVième »	0		0		0
1905	Vième »	40 000 000	=	35 000 000	+	5 000 000
1906	VIième »	0		0		0
1907	VIIième »	20 000 000	=	40 000 000	—	20 000 000
1908-10	VIII, IX et Xième	0		0		0
		K = 100 000 000	=	100 000 000 ;		$\sum_{\lambda}^{1\ldots 10} \alpha_\lambda = 0$

La réserve mathématique pour un franc assuré, pour les différents groupes, est :

$$V_1 = 0{,}3895 = {}_{10}V\left\{{}_{20}P\,(A_{20} ; \overline{20|})\right\}$$
$$V_2 = 0{,}3423 = {}_{9}V \quad id.$$
$$V_3 = 0{,}2972 = {}_{8}V \quad id.$$
$$V_4 = 0{,}2544 = {}_{7}V \quad id.$$
$$V_5 = 0{,}2134 = {}_{6}V \quad id.$$
$$V_6 = 0{,}1737 = {}_{5}V \quad id.$$

$$\begin{aligned} V_7 &= 0{,}1360 = {}_4V \,\big\}\, {}_{20}P\,(A_{20}\,;\,\overline{20|}) \,\big\{ \\ V_8 &= 0{,}0993 = {}_3V \qquad id. \\ V_9 &= 0{,}0653 = {}_2V \qquad id. \\ V_{10} &= 0{,}0321 = {}_1V \,\big\}\, {}_{20}P\,(A_{20}\,;\,\overline{20|}) \,\big\} \end{aligned}$$

Nous obtenons donc, dans ce cas particulier :

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda}^{1\ldots10} (\alpha_\lambda \,.\, V_\lambda) &= 5\,000\,000 \times 0{,}3895 + 10\,000\,000 \times 0{,}2972 \\ &\quad + 5\,000\,000 \times 0{,}2134 - 20\,000\,000 \times 0{,}1360 \\ &= 1\,947\,500 + 2\,972\,000 + 1\,067\,000 - 2\,720\,000 \\ &= 5\,986\,500 - 2\,720\,000 = 3\,266\,500 \end{aligned}$$

La différence des pour-cent de la réserve mathématique comparée aux capitaux assurés, d'après la formule que nous avons trouvée, est :

$$100 \,.\, \frac{\sum_{\lambda}^{1\ldots10} (\alpha_\lambda \,.\, V_\lambda)}{1 \,.\, K} = 100 \,.\, \frac{3\,266\,500}{100\,000\,000} = 3{,}2665\ \%$$

Le rapport des pour-cent est :

$$1 + \frac{\sum_{\lambda}^{1\ldots n} (\alpha_\lambda \,.\, V_\lambda)}{B} = 1 + \frac{\sum_{\lambda}^{1\ldots n} (\alpha_\lambda \,.\, V_\lambda)}{\sum_{\lambda} (c_\lambda \,.\, V_\lambda)}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } \sum_{\lambda}^{1\ldots n} (c_\lambda \,.\, V_\lambda) &= 0{,}3895 \times 5\,000\,000 + 0{,}2972 \times 20\,000\,000 \\ &\quad + 0{,}2131 \times 35\,000\,000 + 0{,}1360 + 70\,000 = 20\,800\,500 \end{aligned}$$

Donc, le rapport en question

$$= 1 + \frac{3\,266\,500}{20\,800\,500} = 1{,}157039$$

Les pour-cent de la réserve mathématique étant différents pour les deux Sociétés en question, montrent l'influence de la marche des affaires, ou de l'allure des acquisitions nouvelles, sur le montant de la réserve.

Premier exemple.

Supposons que les capitaux assurés forment deux progressions arithmétiques croissant en sens inverse.

Société A :

	Capitaux assurés par groupe	Réserve correspondante par groupe
I^er groupe	c	$c \,.\, V_1$
II^ième »	$c + h$	$c \,.\, V_2 + h \,.\, V_2$
III^ième »	$c + 2 \,.\, h$	$c \,.\, V_3 + 2 \,.\, h \,.\, V_3$
IV^ième »	$c + 3 \,.\, h$	$c \,.\, V_4 + 3 \,.\, h \,.\, V_4$
. . . . .	. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .
$(n\text{-}2)^{ième}$ »	$c + (n-3) \,.\, h$	$c \,.\, V_{n-2} + (n-3) \,.\, h \,.\, V_{n-2}$
$(n\text{-}1)^{ième}$ »	$c + (n-2) \,.\, h$	$c \,.\, V_{n-1} + (n-2) \,.\, h \,.\, V_{n-1}$
$n^{ième}$ »	$c + (n-1) \,.\, h$	$c \,.\, V_n + (n-1) \,.\, h \,.\, V_n$

Total des capitaux assurés

$$K = \frac{[2 \,.\, c + (n-1) \,.\, h] \,.\, n}{2}$$

Réserve mathématique totale

$$c \,.\, \sum_{1}^{1 \ldots n} V_\lambda + h \,.\, \sum_{1}^{1 \ldots n} (\lambda - 1) \,.\, V_\lambda$$

Société B :

	Capitaux assurés par groupe	Réserve correspondante par groupe
I^er groupe	$N = c + (n-1) \,.\, h$	$c \,.\, V_1 + (n-1) \,.\, h \,.\, V_1$
II^ième »	$N - \alpha = c + (n-2) \,.\, h$	$c \,.\, V_2 + (n-2) \,.\, h \,.\, V_2$
III^ième »	$N - 2 \,.\, \alpha = c + (n-3) \,.\, h$	$c \,.\, V_3 + (n-3) \,.\, h \,.\, V_3$
IV^ième »	$N - 3 \,.\, \alpha = c + (n-4) \,.\, h$	$c \,.\, V_4 + (n-4) \,.\, h \,.\, V_4$
. . . . .	. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .
$(n\text{-}2)^{ième}$ »	$N - (n-3) \,.\, \alpha = c + 2 \,.\, h$	$c \,.\, V_{n-2} + 2 \,.\, h \,.\, V_{n-2}$
$(n\text{-}1)^{ième}$ »	$N - (n-2) \,.\, \alpha = c + h$	$c \,.\, V_{n-1} + h \,.\, V_{n-1}$
$n^{ième}$ »	$N - (n-1) \,.\, \alpha = c$	$c \,.\, V_n$

Total des capitaux assurés

$$K = \frac{[2 \,.\, c + (n-1) \,.\, h] \,.\, n}{2}$$

Réserve mathématique totale

$$c \,.\, \sum_{1}^{1 \ldots n} V_\lambda + h \,.\, \sum_{1}^{1 \ldots n} (\lambda - 1) \,.\, V_{n+1-\lambda}$$

Le pour-cent de la réserve mathématique, comparée aux capitaux assurés, est :

Pour la Société A :

$$100 \cdot \frac{c \cdot \sum_{1}^{1\ldots n} V_\lambda + h \cdot \sum_{1}^{1\ldots n} (\lambda - 1) \cdot V_\lambda}{K}$$

Pour la Société B :

$$100 \cdot \frac{c \cdot \sum_{1}^{1\ldots n} V_\lambda + h \cdot \sum_{1}^{1\ldots n} (\lambda - 1) \cdot V_{n+1-\lambda}}{K}$$

La différence des pour-cent de réserves, pour ces sociétés, est :

$$100 \cdot \frac{c \cdot \sum_{1}^{1\ldots n} V_\lambda + h \cdot \sum_{1}^{1\ldots n} (\lambda - 1) \cdot V_{n+1-\lambda}}{K}$$

$$- 100 \cdot \frac{c \cdot \sum_{1}^{1\ldots n} V_\lambda + h \cdot \sum_{1}^{1\ldots n} (\lambda - 1) \cdot V_\lambda}{K}$$

$$= 100 \frac{c \cdot \sum_{1}^{1\ldots n} V_\lambda + h \cdot \sum_{1}^{1\ldots n} (\lambda - 1) \cdot V_{n+1-\lambda} - c \cdot \sum_{1}^{1\ldots n} V_\lambda - h \cdot \sum_{1}^{1\ldots n} (\lambda - 1) \cdot V_\lambda}{K}$$

$$= 100\, h \cdot \frac{\sum_{1}^{1\ldots n} (\lambda - 1) \cdot V_{n+1-\lambda} - \sum_{1}^{1\ldots n} (\lambda - 1) \cdot V_\lambda}{K}$$

$$= 100 \cdot h \cdot \frac{V_{n-1} + 2 \cdot V_{n-2} + \ldots + (n-2\, V_2 + (n-1) \cdot V_1}{K}$$

$$-100 \,.\, h \,.\, \frac{V_2 + 2 \,.\, V_3 + \ldots + (n-2) \,.\, V_{n-1} + (n-1)\, V_n}{K}$$

$$= 100 \,.\, h \,.\, \frac{(n-1) \,.\, V_1 + (n-3) \,.\, V_2 + (n-5) \,.\, V_3 + \ldots + (3-n \,.\, V_{n-1} + (1-n) \,.\, V_n}{K}$$

La différence en question est donc égale à :

$$100 \,.\, h \,.\, \frac{\sum_{\lambda}^{1 \ldots n} (n - 2 \,.\, \lambda + 1) \,.\, V_\lambda}{K}$$

En faisant usage d'une fonction exprimant l_x analytiquement en fonction de x, on pourrait mettre cette différence sous forme d'une fonction analytique de x, en cherchant la relation entre V_x et l_x

Deuxième exemple.

Supposons que les capitaux assurés restent constants pour l'une des sociétés et que, pour l'autre, ils croissent en progression arithmétique.

Capitaux assurés :

Société A :		Société B :
I^{er} groupe	c	c
II^{ième} »	c	$c + \alpha$
. . . . .		$c + 2 \,.\, \alpha$
. . . . .		. . . . .
$n^{ième}$ »	c	$c + (n-1) \,.\, \alpha$
Total :	$n \,.\, c$	$\frac{[2 \,.\, c + (n-1)\, \alpha] \,.\, n}{2} = K$

Réserve mathématique :

Société A :	Société B :
$c \,.\, \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} V_\lambda$	$c \,.\, \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} \,.\, V_\lambda + \alpha \,.\, \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} (\lambda - 1) \,.\, V_\lambda$

Le *pour-cent* de la réserve comparée au total des capitaux assurés est, pour les sociétés en question :

Société A : $100 \cdot \frac{c \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} \cdot V_\lambda}{n \cdot c}$

Société B : $100 \cdot \frac{c \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} \cdot V_\lambda + \alpha \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} (\lambda - 1) \cdot V_\lambda}{\frac{2 \cdot c \cdot n + (n-1) \cdot \alpha \cdot n}{2}}$

En posant, pour abréger :

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \alpha}{2} = D$$

la différence des pour-cent ci-dessus devient :

$$100 \cdot \frac{c \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} V_\lambda}{n \cdot c} - 100 \cdot \frac{c \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} V_\lambda + \alpha \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} (\lambda - 1) \cdot V_\lambda}{n \cdot c + D}$$

$$= 100 \frac{n \cdot c^2 \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} V_\lambda + D \cdot c \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} V_\lambda - n \cdot c^2 \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} V_\lambda - n \cdot c \cdot \alpha \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} (\lambda - 1) \cdot V_\lambda}{n \cdot c \cdot (n \cdot c + D)}$$

$$= 100 \cdot \frac{D \cdot c \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} V_\lambda - n \cdot c \cdot \alpha \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} (\lambda - 1) \cdot V_\lambda}{n \cdot c \cdot (n \cdot c + D)}$$

Or, $K = n \cdot c + D$, et $D = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \alpha}{2}$

La différence des pour-cent ci-dessus devient ainsi :

$$= 100 \cdot \frac{\frac{n \cdot (n-1) \cdot \alpha}{2} c \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} V_\lambda - n \cdot c \cdot \alpha \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} (\lambda - 1) \cdot V_\lambda}{n \cdot c \cdot K}$$

$$= 100 \cdot \frac{(n-1) \cdot c \cdot \alpha \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} V_\lambda - 2 \cdot c \cdot \alpha \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} (\lambda - 1) \cdot V_\lambda}{2 \cdot c \cdot K}$$

$$= 100 \cdot \alpha \cdot \frac{(n-1) \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} \cdot V_\lambda - 2 \cdot \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} (\lambda - 1) \cdot V_\lambda}{2 \cdot K}$$

$$\pm 100 \cdot \alpha \cdot \frac{(n-1)[V_1 + V_2 + V_3 \ldots . V_n] - 2 \cdot \{V_2 + 2 \cdot V_3 + \ldots . 3 \cdot V_4 + (n-1) \cdot V_n\}}{2 \cdot K}$$

$$= 100 \cdot \alpha \cdot \frac{(n-1) V_1 + (n-3) V_2 + (n-5) V_3 + \ldots . + (1-n) V_n}{2 K}$$

$$\text{Or, } (n-1) V_1 + (n-3) V_2 + (n-5) V_5 + \ldots . (1-n) V_n$$

$$= \sum_{\lambda}^{1 \ldots n} (n - 2 \cdot \lambda + 1) \cdot V_\lambda$$

La différence des pour-cent des réserves mathématiques devient donc finalement :

$$100 \cdot \alpha \cdot \frac{\sum_{\lambda}^{1 \ldots n} (n - 2 \cdot \lambda + 1) \cdot V_\lambda}{2 \cdot K}$$

II. Influence du rachat, de la réalisation et de la réduction des contrats.

Le rachat, la résiliation et la réduction des contrats ne peuvent être soumis à aucune loi certaine. Ils sont régis par la situation économique du pays (chômage, rendement des récoltes, etc.)

Il arrive dans une société, et pendant un certain temps, que les contrats récents sont ceux qui sont rachetés par les assurés, tandis que dans une autre, ce sont les anciens contrats qui sont résiliés et rachetés. Cette différence dans les rachats exerce, sur le montant des réserves mathématiques, une influence qui sera constatée clairement dans l'exemple suivant :

Exemple. Deux sociétés, A et B, ont été fondées en 1900. Les bases de calcul et les combinaisons pratiquées par ces deux sociétés sont les mêmes (table de mortalité H^m, taux 4 %; supposons, comme combinaison, assurance en cas de décès et assurance mixte, durée vingt ans.)

Supposons qu'au 1er janvier 1909, leur situation soit identique et représentée par le tableau suivant :

TABLEAU X

Année	Groupe	Age à l'entrée	Nombre de polices	Moyenne du capital assuré par chaque police	Capitaux assurés
1900	I	20	1 000	10 000	10 000 000
1901	II	25	2 000	15 000	30 000 000
1902	III	30	500	10 000	5 000 000
1903	IV	35	1 500	10 000	15 000 000
1906	V	40	1 500	15 000	22 500 000
1907	VI	45	2 000	10 000	20 000 000
		Total	8 500		102 500 000

Supposons maintenant que, dans le courant de 1909, le montant de la somme des rachats soit le même pour les deux sociétés, mais provienne de différents groupes d'âges. Voir le tableau ci-dessous :

TABLEAU XI

Société A			Société B		
Groupe	Nombre des polices rachetées	Montant des sommes payées pour les polices rachetées	Groupe	Nombre des polices rachetées	Montant des sommes payées pour les polices rachetées
		Fr.			Fr.
I	600	6 000 000	III	200	2 000 000
II	800	12 000 000	IV	500	5 000 000
III	200	2 000 000	V	800	12 000 000
IV	500	5 000 000	VI	600	6 000 000
Total	2 100	25 000 000		2 100	25 000 000

Au 1er janvier 1910, la situation respective des deux sociétés est représentée par le tableau suivant :

TABLEAU XII

Année	Société A				Société B			
	Nombre des polices encore en vigueur dans les 6 groupes	Age à l'entrée	Capitaux assurés respectivement dans les 6 groupes	Réserve mathémat. pour chaque groupe	Nombre des polices encore en vigueur dans les 6 groupes	Age à l'entrée	Capitaux assurés respectivement dans les 6 groupes	Réserve mathemat. pour chaque groupe
			Fr.	Fr.			Fr.	Fr.
1900	400	20	4 000 000	1 478 000	1 000	20	10 000 000	3 895 000
1901	1 200	25	18 000 000	6 147 000	2 000	25	30 000 000	10 245 000
1902	300	30	3 000 000	886 500	300	30	3 000 000	888 500
1903	1 000	35	10 000 000	2 523 000	1 000	35	10 000 000	2 523 000
1906	1 500	40	22 500 000	3 116 000	700	40	10 500 000	1 407 000
1907	2 000	45	20 000 000	2 036 000	1 400	45	14 000 000	1 425 200
	6 400		77 500 000	16 086 000	6 400		77 500 000	20 381 070

Nous remarquons, dans cet exemple, une particularité provenant du rachat. Les deux sociétés ont : même montant des

capitaux assurés, même nombre d'années au 1er janvier 1910, adopté les mêmes bases de calcul, et cependant, le montant de leurs réserves est différent. Ainsi, le rapport de la réserve au capital assuré est de 20,76 % pour la société A et de 26,30 % pour la société B, ce qui permet aux représentants de la société B de faire une concurrence fructueuse à la Société A. Et pourtant, la solidité des deux sociétés est la même.

III. Influence du moment choisi par le public pour s'assurer.

Chaque société trouve, d'après les circonstances, un certain champ d'activité propre à elle ; les unes s'adressent plus spécialement aux commerçants, d'autres aux agriculteurs, d'autres encore de préférence, ou même exclusivement, aux employés et ouvriers. Or, il est naturel qu'une personne s'assure au moment de l'année où ses finances le lui permettent le mieux. Les sociétés dont la clientèle se recrute parmi des agriculteurs, par exemple, feront plus d'affaires en automne de chaque année, au moment où le paysan réalise le rendement de ses récoltes. Celles dont la clientèle est formée de commerçants passeront certainement un plus grand nombre de contrats au début de l'année, époque du bouclement des comptes ; et ainsi de suite. Ces contrats, passés à des époques plus ou moins déterminées, exercent une influence sur le montant des réserves mathématiques, influence qui n'est pas mentionnée dans les comptes-rendus.

Exemple. Supposons, comme précédemment, que les deux sociétés A et B commencent leur activité en même temps, avec la même combinaison (assurance mixte, durée vingt ans) et avec les mêmes bases de calcul (table de mortalité H^m, taux 4 %).

Pour simplifier l'exemple, admettons que l'une des deux sociétés conclut des contrats le 1er avril, et l'autre le 1er octobre de chaque année. Leur situation au 1er janvier 1910 est exposée dans le tableau suivant.

TABLEAU XIII

Année de souscription des contrats	Age à l'entrée	Société A — Tous les contrats sont conclus le 1er avril de chaque année		Société B — Tous les contrats sont conclus le 1er octobre de chaque année	
		Capitaux assurés	Réserve mathématique au 1er janvier 1910	Capitaux assurés	Réserve mathématique au 1er janvier 1910
		Fr.	Fr.	Fr.	Fr.
1900	20	5 000 000	1 888 500	5 000 000	1 770 500
1901	25	7 000 000	2 341 325	7 000 000	2 154 778
1902	30	8 000 000	2 278 600	8 000 000	2 107 800
1903	35	10 000 000	2 421 000	10 000 000	2 217 000
1904	40	20 000 000	4 049 500	20 000 000	3 656 500
1905	45	10 000 000	1 647 500	10 000 000	1 464 500
		60 000 000	14 000 000	60 000 000	13 371 078
			=24,33 %		=22,29 %

Nous voyons que les deux sociétés ont une situation égale, puisqu'elles pratiquent la même combinaison et qu'elles ont : le même nombre d'assurés, et le même montant de capitaux assurés; cependant leurs réserves mathématiques sont différentes, l'une étant de 24,33 %, l'autre de 22,29 % des capitaux assurés. Différence : 2,03 %. Ici encore, la cause de cette différence est implicite.

IV. Influence de l'âge des assurés. [1]

En fait, chaque société n'assure pas des personnes de même âge. Reprenons l'exemple des deux sociétés A et B. Le tableau suivant, tableau XIV, nous montre l'influence exercée par la

[1] L'âge des assurés est une cause explicite, car il est évident que, toutes choses égales d'ailleurs, le montant de la réserve sera fonction de cet âge. Cependant, nous faisons figurer l'âge aussi parmi les causes « implicites », parce que, dans les rapports que publient les sociétés d'assurance, l'âge des assurés n'est pas indiqué.

différence d'âge des assurés sur la réserve mathémaque des deux sociétés A et B qui ont, d'autre part, mêmes bases et pratiquent la même combinaison (assurance en cas de décès dite « vie entière »; table de mortalité H^m; taux 4 %).

TABLEAU XIII

Situation au 1er janvier 1910

Année	Société A				Société B			
	Age à l'entrée	Nombre des polices dans chaque groupe	Capitaux assurés au 1er janvier 1910	Réserve mathématique au 2 janvier 1910	Age à l'entrée	Nombre des polices dans chaque groupe	Capitaux assurés au 1er janvier 1910	Réserve mathématique au 1er janvier 1910
			Fr.	Fr.			Fr.	Fr.
1900	20	500	5 000 000	385 100	35	500	5 000 000	667 650
1901	24	1 000	10 000 000	797 100	40	1 000	10 000 000	1 436 300
1902	27	2 000	20 000 000	1 549 000	45	2 000	20 000 000	3 014 000
1905	30	500	5 000 000	257 600	47	500	5 000 000	490 300
1907	34	2 000	20 000 000	699 600	50	2 000	20 000 000	1 301 800
		6 000	60 000 000	3 688 400 = 6,146 %		6 000	60 000 000	6 911 050 = 11,518 %

La réserve de la société A est de 6,146 %, celle de la société B de 11,518 %. Différence: 5,372 %; cependant, on aurait tort d'en conclure que la situation de la société A soit moins favorable que celle de la société B; elles offrent, au contraire, les mêmes garanties de solidité.

V. Influence de l'échéance des contrats.

Les contrats à échéance sont principalement des contrats d'assurance dotale et d'assurance mixte. A l'échéance des contrats, les assurés reçoivent, en vertu des conventions, la somme sti-

pulée. L'assureur puise naturellement cette somme dans la réserve mathématique. Or, si les contrats échus sont nombreux, la réserve diminue rapidement. Si, pour prendre un exemple concret, on prélève sur la valeur de la réserve mathématique une somme de 1 million de francs pour effectuer les paiements des contrats échus (en supposant qu'il s'agisse d'assurances mixtes, d'une durée de vingt ans, l'âge d'entrée étant supposé également de vingt ans), il serait nécessaire de procéder à de nouvelles acquisitoins d'assurés de vingt ans, avec même combinaison, pour une somme de 31 millions de francs, si l'on voulait maintenir au même niveau le montant de la réserve mathématique. Cette opération serait nécessaire au rétablissement du même montant de la réserve. La société n'arrive-t-elle à réunir que pour 15 millions de francs d'acquisitions nouvelles, par exemple, les capitaux assurés augmenteront de 15 millions, mais la réserve mathématique aura diminué de Fr. 500 000. Ceci explique la diminution des réserves mathématiques malgré l'augmentation du capital. Ce fait s'observe pour la Société suisse d'assurances générales sur la vie à Zurich, comme nous l'avons fait remarquer plus haut.

Conclusion.

L'exposé ci-dessus nous donne une idée de la diversité des influences auxquelles la réserve mathématique est soumise, surtout le rapport de la réserve mathématique au montant des capitaux assurés. Comme nous l'avons dit, certaines causes de variation apparaissent immédiatement à la lecture des comptes-rendus que publient les sociétés ; d'autres, moins tangibles, nécessitent une étude approfondie des sociétés, et des circonstances de leur vie pratique.

Cependant, ces dernières influences ne portent pas atteinte aux principes fondamentaux, c'est-à-dire aux bases techniques, d'une société. Toutes nos conclusions ont été tirées en admettant que les sociétés continuent à suivre exactement les principes établis et admis lors de leur fondation. Leur solidité n'est ainsi nullement ébranlée, mais la variation de leurs réserves provient uniquement de l'inégalité des influences susnommées. Pour cette raison, les compagnies d'assurances qui font de la réclame en avançant que le montant de leur réserve mathématique est proportionnellement plus élevé que celui d'autres sociétés concurrentes, ont absolument tort. Au lieu de faire cette réclame généralement mal placée, les compagnies en question devraient publier les conclusions tirées par des personnes compétentes dans leurs révisions. Mieux encore, pour éviter de faire des affaires d'assurance — qui ont, en ce moment, une haute importance aux yeux du public —, un objet de commerce, les compagnies devraient être présentées au public par des personnalités jouissant de toute sa confiance.

Le contrôle de l'État s'est révélé nécessaire et efficace. La Suisse nous offre, à cet égard, un exemple à suivre, par la bonne organisation de la surveillance exercée sur les compagnies d'assurance. Grâce au contrôle permanent du Bureau fédéral des assurances, à Berne, les sociétés exerçant leur activité en Suisse sont dans l'impossibilité de transformer leurs affaires en spéculations commerciales. Ceci constitue un réel progrès dans le développement d'une institution qui, depuis un siècle et demi, n'a cessé de s'étendre et de se perfectionner, et qui est, à l'heure actuelle, un des plus importants rouages de la vie économique dans tous les pays civilisés.